<36612519890011
<36612519890011
Bayer. Staatsbibliothek

4° Math. P.
248.

4° Math. P. 248 *

(248 m

Mathesis. Geometria generalis 262.

Gründe
Der
Meßkunst /
In einer neuen Ordnung
vorgestellet /

R

Und
mit deutlichen und kurtzen Beweißthümern /
Zum Gebrauch
Der Königlichen Preußischen
Fürsten- und Ritter-Academie
abgefasset /
Durch

Ph. Naudé, Professor. Matheseos,

Mit Königlichem Preußischen allergnädigstem Privilegio,

Zu finden bey Johann Michael Rüdigern / Buchhändlern /
BERLIN /
Gedruckt bey Johann Lorentz / Im Jahr 1706.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Aller-Durchlauchtigsten / Groß-mächtigsten Fürsten und Herrn /

Hrn. Friedrichen / Könige in Preussen /

Marggraffen zu Brandenburg / des Heil. Römischen Reichs Ertz-Cämmerern / und Churfürsten / Souverainen Printzen von Oranien / zu Magdeburg / Cleve / Jülich / Berge / Stettin / Pommern / der Cassuben und Wenden / auch in Schlesien / zu Crossen Hertzogen / Burggraffen zu Nürnberg / Fürsten zu Halberstadt / Minden und Cammin / Graffen zu Hohenzollern / Ruppin / der Marck / Ravensberg / Hohenstein / Lingen / Mörs / Bühren und Lehrdam / Marquis zu der Vehre und Vlißingen / Herren zu Ravenstein / der Lande Lauenburg und Bütow / auch Arlay und Breda /

rc. rc. rc.

Meinem allergnädigsten Könige und Herrn.

Dem

Aller-Durchlauchtigsten / Groß-mächtigsten

Fürsten und Herrn /

Herrn Friedrichen /

Könige in Preussen /

Marggraffen zu Brandenburg / des Heil. Römischen Reichs Ertz-Cämmerern / und Churfürsten / Souverainen Printzen von Oranien / zu Magdeburg / Cleve / Jülich / Berge / Stettin / Pommern / der Cassuben und Wenden / auch in Schlesien / zu Crossen Hertzogen / Burggraffen zu Nürnberg / Fürsten zu Halberstadt / Minden und Cammin / Grafen zu Hohenzollern / Ruppin / der Marck / Ravensberg / Hohenstein / Lingen / Mörs / Bühren und Lehrdam / Marquis zu der Vehre und Vlißingen / Herren zu Ravenstein / der Lande Lauenburg und Bütow / auch Arlay und Breda /

rc. rc. rc.

Meinem allergnädigsten Könige und Herrn.

Aller-Durchlauchtigster/Groß-mächtigster König/

Allergnädigster Herr!

WIe gemein es ist/ daß den gecrönten und Durchläuchtigen Häuptern/ die Bücher der Gelehrten dediciret werden; so schwer ist es hingegen eine Materie zu finden und auszuarbeiten/ welche dieser grossen Ehren nicht gantz unwürdig scheine.

In Betrachtung dessen/ habe ich sehr lange Zeit bey mir angestanden/ ob Euer Königlichen Majestät ich gegenwärtigen Tractat allerunterthänigst zu zuschreiben/

mich unterfangen dürffte. Nach reiffer Erwegung aber aller Umstände / und Beschaffenheiten dieses Wercks / habe ich mich endlich solches erkühnet / in dem allerunterthänigsten Vertrauen / daß mein Beginnen aus folgenden Ursachen nicht ungnädig werde genommen werden.

Erstlich ist die Materie von grossem Gewichte / und gehöret unter diejenigen Wissenschafften / in welchen Könige und Fürsten nicht nur Ihre Cron-Erben und Nachfolger / sondern auch Ihre Adeliche Landes-Jugend / mit sonderbarem Fleiß unterrichten lassen: Zu welchem Ende auch von Euer Königl. Majest. selbst eine Fürsten- und Ritter-Academie allhier gestifftet worden / welche nicht allein Dero Residentz einen ungemeinen Glantz beyleget / sondern auch gegenwärtiges Werck verursachet

Ferner

Ferner/ hat Euer Königl. Majest. hohe Gnade/ damit dieselbe diese geringe Arbeit angesehen/ von mir eine schuldigste Danckbarkeit erfodert/ welche ich aber nicht anders als durch Deren allerunterthänigste Zuschrifft Euer Königl. Majest. und der gantzen Welt zu erweisen/ Vermögens gewesen.

Endlich habe ich allen Fleiß und Sorgfalt/ nach meinem äussersten Vermögen angewand/ dieses Werck/ dessen Praxis zur Sicherheit eines wohlangeordneten Staats höchst-nöthig ist/ von allen denen Mängeln zu saubern/ welche in denen Büchern/ so in der Teutschen Sprache davon gehandelt/ bisher vorgefallen; und mache mir dannenhero Hoffnung/ daß nicht nur diejenigen so von dieser Wissenschafft ihr eigen Werck machen/ diese meine Bemühung genehm halten/ sondern auch Euer Königl. Majest. einen

anä-

gnädigen Blick auf diese meine Arbeit werffen werden.

Aus diesen Ursachen und in diesem allergehorsamsten Vertrauen wende zu Euer Königl. Majest. als dem unstreitig-grössesten Beschützer und Beförderer aller Edlen Künsten und Wissenschafften/ich mich mit diesem Wercke/ und bitte mit aller Unterthänigkeit/selbiges mit allergnädigsten Augen anzusehen/und mir zu erlauben/ daß ich mich öffentlich hiermit verbinde mit dem allertiefsten Respect zu beharren

Aller-Durchläuchtigster/Großmächtigster
König/
Allergnädigster Herr/
Euerer Königlichen Majestät

Allerunterthänigster / und allergehorsamster

Ph. Naudé.

Vorrede.

Weil es weder vernünfftig noch billig seyn würde / ein neues Werck an den Tag zu geben / in welchem man die Materi gantz anderst verhandelt zu haben vorgibt / als bißhero geschehen / wann nicht erstlich der rechte Zweck desselben solte erkläret werden; Als will ich in dieser Vorrede mich bemühen etwas anzuführen / daraus der Leser gleich anfangs wird ersehen können / was Er von diesem Werck zu gewarten habe.

Nachdem ich die schönsten Elementa Geometriæ, die bißhero in Europa in Druck gekommen / durchgelesen / und dabey angemercket / was noch an denselben möchte zu wünschen seyn / damit sie zum Gebrauch bequemer und angenehmer möchten befunden werden / und folglich / wie sie unserer Fürsten und Ritter-Academie, in welcher ich die Ehre habe / diese Wissenschafft zu profitiren / am nützlichsten seyn könten / hab ich mich bemühet / eins und das andere zu verbessern / aus folgenden Uhrsachen.

Erstlich zwar / sahe ich deren keine in Teutscher Sprache / die bequem hierzu könten gebraucht werden / weil in denselben

die Elementa kaum halb begriffen / und diese noch so mangelhafft seynd / daß die Eigenschafften der Cörper / gantz ausgelassen / soviel nemlich die Demonstrationes oder Beweißthümer derselben angehet: Zudem seynd alle / von was für eine Sprach man auch reden mag / daher unbequem / daß die eine zu weitläufftig / die andere aber zu kurtz eingeschrencket: und neben dem / daß sie wegen der unbequemer Art ihrer Citationum, sehr beschwerlich fallen; Endlich brauchen sie auch viele solche Redens-Arten / welche von dem gemeinen Gebrauch im Reden so weit entfernet / und so unnatürlich scheinen / daß sie bey denen Anfängern / nicht anderst als mit grosser Mühe können gebraucht werden / da man doch vornehmlich darauff sonderlich Acht zu geben hat / wann sie einer distinguirten Jugend dienen sollen / welche nicht gewohnet ist / mit grosser Mühe etwas zu fassen.

Alle diese Ungelegenheiten nun / so viel die Natur der Sache zuläßt / zu vermeiden / habe ich mir vorgenommen / solche Elementa auszugeben / die ohne eitelen Ruhm / hierinnen etwas sonderliches in sich begreiffen.

Erstlich hab ich mich nach dem Exempel vieler berühmten Professorum Matheseos unserer Zeit / gar nicht an die Ordnung noch an die demonstrationes des Euclidis binden wollen / sintemahl von ihm man wol sagen kan / daß er zu kurtz und zu lang / oder zu weitläufftig / und zu sehr eingeschrencket gehandelt hat: jenes / weil er hunderterley unnütze Sachen tractiret und mit grossen Fleiß beweiset / die man sehr wol entbähren könte; dieses aber / weil sehr viele Sachen / die zu den Elementen der Geometrie gehören / und dazu nöthig seynd / darinnen nicht zu finden seynd; Als zum Exempel, der Beweiß von den Wissenschafften / welche nöhtig sind um die Kugel und ihre Theile abzumessen.

Solches alles nun zu verbessern / so viel ich nehmlich dazu

capable

capable seyn werde/ hab ich diese Elementa in sieben Bücher wollen abtheilen/ davon das Erste/ von den Proportionibus, oder Ebenmäßigkeiten insgemein; Das Andere/ von den Linien/ und deren Eigenschafften; Das Dritte/ von den flachen Figuren/ in Ansehung ihrer Umkreiß/ und denen Linien die man drinnen ziehen kan: Das Vierdte/ von den flachen Figuren/ nach ihrem Inhalt: Das Fünffte/ von denen an Flächen anstossenden Linien: Das Sechste/ von denen Cörpern insgemein; Und endlich/ das Siebende/ von denen Cörpern/ oder dichten Figuren/ nach ihren Cörperlichen Inhalt/ handeln wird.

Was die Citationes, oder Anweisung der angezogenen Oerter angehet/ die wollen wir so leicht zu finden machen/ daß es durchaus unmüglich seyn wird/ selbige leichter zu machen/ indem nur eine einige Zahl/ die ausser der Schrifft am Rande erscheinet/ darzu gebraucht wird; obwol das gantze Werck/ in viele Bücher/ und ein jedes Buch in viele Capittel abgetheilet ist: welches dann in dieser Materi/ nicht ein geringes ist/ dann wir sonst vortreffliche Frantzösische Elementa haben/ die bloß um ihrer allzuschweren Citationen fast nicht zu gebrauchen seyn. Selbige seynd abgetheilet/ in viele Bücher/ jedes Buch in viele Sectiones, eine jede Section in viele Theoremata; Problemata, Lemmata, Corollaria &c. Also daß wann der Autor, sich auff etwas beziehen will/ er zum Exempel sagen muß/ Liv. 2. §. 4. Theor. 5. Coroll. 3. dergestalt/ daß ehe man sich auff diese Zurückweisung recht besonnen/ um selbige zu besehen/ wie es offt nöthig ist/ einem der gantze Beweiß aus dem Kopff entfallen ist.

Man hat hier/ mit dem Buch der Proportionum den Anfang gemacht/ weil mir diese Materi als die beste vorkommet/ um den Verstand zueröffnen/ und um sich an die Mathematischen Raisonnemens oder Schluß-Reden zu gewöhnen/ und zu

 dem

dem noch / um hundert Beweißthümer in folgenden Büchern / mit einer schlechten Zurückweisung abzufertigen / welche sonsten sehr weitläufftig müsten bewiesen werden. Uber dem / hab ich diese sonst schwere / verwirrete / aber wichtige Materi / dergestalt erkläret / und von allen confusion befreyet / daß nicht leichtlich ein einiges dubium mehr darinnen wird zu finden seyn.

Hernach / um mir den Weg zu den kurtzen Beweißthümmern zu bahnen / hab ich ein kleines Capittel in diesem ersten Buch gesetzet / um die vier Species, und die Radices, in den kleinesten und leichtesten Buchstäblichen grössen auszulegen / wie sie heut zu Tage / in der neuen Analysi oder Algebra gebräuchlich seynd. Ich habe die Hoffnung / man wird hier / wie auch sonst weiter / ein solches Licht finden / als sonsten in dergleichen Materien bißher / nicht leicht erschienen. Was die Art des Raisonnement angehet / die hab ich so natürlich seyn lassen / wie sie gemeiniglich in andern Materien pfleget zu seyn / und habe die Beweißthümer oder Schluß-Reden insgemein / nicht anderst angedeutet / als mit dem Wörtlein dann / wie man sonst pfleget / ausgenommen im ersten Buch / und in wenig andern Orten / da es etwas anderst lautet.

Damit ich aber auch Ruhm gebe dem Ruhm gebühret / will ich dem günstigen Leser unverholen seyn lassen / daß ich ein gutes Theil der vornehmsten Anstalt / und des Wercks selbsten / aus einem andern frantzösischen Werck / welches nie publiciret / genommen / und welches gemacht und gebraucht worden ist / theils schon gecrönte Häupter / theils solche / die die Cron als Erben noch zugewarten haben / in der Mathesi zu unterweisen: Doch hab ich von diesem Werck / viele propositiones, die mir unnütze vorgekommen / ausgelassen; viele von meinen eigenen / die allerdings dabey kommen musten / hier zugesetzet; viele demonstrationes verändert / und gebessert / und also gemacht / daß alles deutlich geworden / welches sonst wegen

der

der übelen Abschrifft / nicht kunte verstanden werden. Und weil das Werck keine citationes gehabt / und dadurch auch dem Publico gantz untauglich war / hab ich solche dabey gesetzet / und wie schon gesagt / selbe so gesetzet / daß sie nicht leichter zu finden seyn können. Mit einem Wort / es seynd soviel Veränderungen darzu gebracht / um dasselbe zu verbessern / daß ob ich wol mich für den Autorem dieses Werck ausgeben könte / habe ich doch auffrichtig handeln wollen / dann ich billig gestehen muß / daß diß mein Werck ohne das ander / zu der perfection die man drinnen siehet / nicht kommen wäre / wann jenes ander / mir nicht zu Gesicht kommen wäre.

Was die Redens-Art betrifft / lebe ich der Hoffnung / man werde mir / weil ich kein gebohrner Teutscher bin / einige Gallicismos, die uns unvermeidlich seynd / zu gut halten; desto mehr / weil man doch ohne dem / in dieser Materi / auff die Beredsamkeit nicht bedacht ist / sondern nur sein Absehen auff die deutliche Wortstellung hat / deren ich mich äusserst beflissen habe. Was sonsten die Geometrische terminos angehet / die hab ich bey den besten Teutschen Autoribus ausgelesen / wiewol ich in etlichen Orten / da mich keiner vergnüget hat / einige Wörter selber ersonnen / welche mit besonderem Glück scheinen eingetroffen zu haben. Was die andere Wörter angehet / die mir auff Teutsch zu gezwungen verkommen seynd / die hab ich / wie viele andere Autores, Frantzösisch oder Lateinisch gelassen.

Weil auch gemeiniglich die Mathematici sich auff den Euclides beziehen / wird man hier am Ende ein Register sehen / da der Leser wird finden können / wo man alle seine vornehmste propositiones, oder die etwas wichtiges in der Geometrie nach sich ziehen / auff eine gantz neue / viel kürtzere / und leichtere Art / als er es selbst gethan / bewiesen hat.

Was das Format angehet / hat man für dienlich befunden

selbiges in Quarto zu lassen / den Druck aber in Octavo, um einen breiten Rand zu bekommen / damit unsere hohe Academici, und ein jeder ander curieuser Leser / die Figuren neben den discours hinsetzen könne; wiewol dem Publico zu dienen / die Figuren / alle beyeinander / am Ende zu finden seynd; und dieses auch so bequem / als es immer geschehen kan / indem sie also eingebunden werden / daß sie / wo man will / auswendig erscheinen / wann gleich das Buch zu wäre.

Das ist nun der Zweck / den wir uns in diesem Werck vorgenommen haben. Gleich wie man aber bißhero noch keinen Autorem angetroffen / der zur absoluten perfection oder Vollkommenheit gestiegen / oder der allen Menschen ein völliges Vergnügen geleistet / so bilde ich mir auch nicht so viel ein / daß ich meinen solte / glücklicher darinnen als andere gewesen zu seyn; und zweiffele auch gantz nicht / man werde hinführo / wie vorhin / allezeit in neuen Wissenschafften / avanciren und zunehmen / wie von der Welt Anfang her biß dato geschehen. Es ist genug / um einigen Danck von vernünfftigen billigen und auffrichtigen Lesern durch seine Mühe und Fleiß zu erwarten / daß ein jeder / in seiner profession fleißig- und curieuser Mensch / von dem Seinigen etwas zusetze oder beytrage / um uns etwas näher / zu der so erwünschten Vollkommenheit zu bringen / nach welche man allezeit trachten / und zu der man sehr wahrscheinlich / nimmer völliger gelangen wird.

Solte immittelst etwan ein edeles Gemüht und erfahrener Mensch sich finden / der noch etwas angemercket hätte / wodurch unser Werck noch näher zu der perfection hätte können gebracht werden / und der auch so generöß seyn wolte / und uns seine Meinung darüber / schrifftlich oder anderst eröffnen / will ich auch so lehrbegierig / und so danckbar mich gegen ihm erzeigen / das wo man zu einem zweiten Druck kommen solte / und sein vorgeben sich in der That also vortheilhafftig befinden

den würde / man demselben darinnen gantz fleissig nachleben / und ihm auch öffentlich die Ehre darvon zuschreiben wird.

Was die neidische Mißgönner und Tadler angehet / deren Auge schiel sihet / wann etwan einer seiner Pflicht rechtschaffen nachlebet / und die durch Verkleinerung eines Wercks / dazu sie selbst incapables seynd / für gelehrt wollen angesehen werden; die siehet man mit bedauren an / als welche am Gemüht etwas kranck seynd / und also auch unfähig über eine Sache / ein gesundes Urtheil zu fällen / und wünschet man ihnen darinnen eine völlige Gesundheit / und folgends auch allerhand Glück und Heyl.

Wann ich aber spühren werde daß diese Elementa, oder dieses fundament der Geometrie, denen interessirten und dem Publico nicht mißfalle / hab ich mir vorgenommen / mit Hülff des Allerhöchsten / ein solches Gebäude darauff zusetzen / das dem fundament gemäß seyn wird / und welches auch darauff kommen muß / nehmlich unterschiedliche Tractate, die zur Praxis der Geometrie gehören / und werde ich mich bemühen / daß dieses Theil auch von unnützer Weitläufftigkeit / die man sonst überall / in demselben antrifft / befreyet seyn möge; wogegen ich recht fundamental-Regeln / die alle casus particulares erschöpffen / welche fast unendlich an der Zahl / und offt grosse Bücher unnützer weise erfüllen / beybringen werde. Endlich / will ich auch dahin sehen / daß ein jeder verständiger Mensch / proprio Marte und von sich selber / dieses alles wird verstehen und verrichten können / wann er diese meine Arbeit recht durchgangen / und aus denselben sich einmahl recht wird erbauet haben. Und wo mir GOTT das Leben lässet / wil ich vielleicht auch nach diesem allem / noch andere Mathematische Tractätlein ausgeben / die verhoffentlich von unsern hohen Academisten / noch von den verständigen Liebhabern / nicht unnütz oder unangenehm werden geschätzet werden.

Axiomata

Axiomata oder Grundsätze die in der gantzen Mathesi zum Voraus genommen werden / und welche solche Aussprüche seynd / an welcher Wahrheit / niemand zweiffeln kan / wann er nur die Meinung derselben wol verstehet.

I. Das gantze ist grösser als ein Theil darvon.

II. Das gantze ist gleich der Summe, oder der Versamlung aller seiner Theile zusammen genommen.

III. Alle die Grössen / darvon eine jede / einer gewissen andern gleich ist / die seynd auch alle mit einander unter einander gleich.

IV. Wann gleiche Grössen / durch Mittel anderer gleichen Grössen / oder auch allein in sich selbsten gleicherweise tractiret werden / nehmlich durch Addition, Subtraction, Multiplication, Division, oder gleiches Nahmens extractio Radicum; was heraus kommet ist auch gleich.

V. Wann man von gleichen Grössen ungleiche Grösse abziehet / die überbleibende Grösse / seynd ungleich.

VI. Solche Grösse welche sich allerdings miteinander schicken / also daß die eine die andern nirgendswo übertrifft / wann sie auf einander oder in einander geleget werden / die seynd miteinander gleich.

VII. Wann gleiche gerade Linien / oder gleiche gerad linichte Winckel / auf einander geleget werden / die schicken sich allerdings zusammen.

ELEMENTA GEOMETRIÆ, Oder Gründe der Erdmeßkunst.

I. Buch.

De Proportionibus, oder von den Ebenmäßigkeiten.

MAn erkennet eine Grösse nicht anderst als durch die Gegenhaltung oder Verhaltnüß derselben mit einer bekanten Grösse. 1.

Die Verhaltnüß ist zweyerley / die eine ist Arithmetisch die andere Geometrisch. 2.

Sie wird Arithmetisch genennet / wann man betrachtet / wie viel eine gewisse Grösse 3.

grösser ist als die andere; und Geometrisch/ wann man betrachtet/was für ein Theil die eine ist in der anderen: nun ist es eigentlich das Letzte / welches man gemeiniglich Ratio oder Verhaltnüß nennet.

4. Wann zwo Grössen eben die Verhaltnüß gegeneinander haben/als zwo andere Grössen auch gegeneinander/so wird diese Gleichheit der Verhaltnüß proportio oder Ebenmäßigkeit genennet.

Wir wollen in diesem Buch betrachten und beweisen die Eigenschafften der Verhaltnüssen und Ebenmäßigkeiten / welche wir offt mit Zahlen wollen vorstellen/grösserer Leichtigkeit halben/wiewohl sie auff allerhand Grösse müssen und können appliciret werden.

Aber ehe wir zur Sache schreiten/ wollen wir ein kleines Capittel vorsetzen / welches uns ein Mittel seyn wird/ um die Beweißthümer oder Demonstrationes in einer Zeilen zu geben / die in sechs oder acht müsten vorgestellet werden.

Vorbereitungs-Capittel.

Von der Art und Weise alle die Species der Arithmetica zu practiciren / mit solchen Grössen die mit Buchstaben bezeichnet seynd/ nach Art der neuen Analysis

lysis oder Algebra, so weit nehmlich uns dieses hier nöthig seyn kan.

Außlegung der Zeichen.

+ bedeutet und oder mit. Als 9 + 3. bedeutet 9. und 3. oder 9. mit 3. 5.

— bedeutet weniger als 14 — 2. bedeutet 14 weniger 2. 6.

∞ bedeutet ist gleich. als 9 + 3 ∞ 14 — 2. das ist/ 9. mit 3 ist gleich/ oder gilt so viel als 14 weniger 2. 7.

:: Diese vier Puncten, wann sie zwo unterschiedene Grössen vor sich haben / und zwo andere hinter sich/ geben zu verstehen / daß solche vier Grössen eine Geometrische Ebenmäßigkeit oder Proportion begreiffest. Als 6. 2 :: 12. 4. bedeutet / daß 6 stehet zu 2. als wie 12. stehet zu 4. nehmlich in gleicher Geometrischer Verhaltnüß. 8.

: Diese zwey Puncten, wann sie zwo unterschiedene Grössen vor sich haben und zwo andere hinter sich/ geben zu verstehen / daß solche vier Grössen eine Arithmetische Ebenmäßigkeit oder Proportion begreiffen/ als 7. 3 : 13. 9. bedeutet / daß 7 um so viel grösser ist dann 3. als 13 grösser ist dann 9. 9.

÷ Im Anfang etlicher unterschiedenen Grössen gesetzet/ bedeutet/ daß solche Grössen eine gebundene Geometrische Ebenmässigkeit / oder einen Geometrischen Fortgang ausmachen/ proportio Geometrica continua, oder progressio Geometrica, als ÷ 16. 8. 4. 10.

das ist/16. stehet zu 8. als wie 8. zu 4. als wie 4. zu 2. 2c.

11. ÷ Im Anfang etlicher unterschiedenen Grössen gesetzet/ bedeutet daß solche Grössen eine gebundene Arithmethische Ebenmäßigkeit/ oder Arithmetischen Fortgang ausmachen/ proportio Arithmetica continua, oder progressio Arithmetica, als ÷ 19. 16. 13. 10. 7. 4. das ist / 19. ist so viel grösser als 16. / wie 16. grösser ist als 13. / wie 13. grösser ist als 10. 2c.

12. Hier hat man im Gebrauch alle Grössen in genere, und insgemein mit Buchstaben zu verzeichnen oder vorzustellen/ohne daß man sich bekümmere / was für Grösse sie bedeuten/ob sie eine Zahl/oder eine Linie/ oder eine Zeit 2c. bedeuten / weil man sie doch nur brauchet/ um dadurch zuschliessen / daß die Grösse b ist die Grösse b. die Grösse a ist a. die Grösse c ist c. oder (welches ein Ding ist/wann von Grössen gehandelt wird/) daß b ∞ b. daß a ∞ a. und daß c ∞ c. &c.

ADDITIO.

13. Soll man addiren b mit c, so schreibet die Summa also, b + c.

Soll man addiren b mit b und c, so ist das facit, 2 b + c.

SUBTRACTIO.

14. Soll man subtrahiren c von b, so ist das facit b — c.

Soll man subtrahiren b und c von 3 b. so ist das facit 2 b — c,

MUL-

MULTIPLICATIO.

Hier muß man nur observiren/ daß/ wann die Zeichen der Producenten gleich seynd/ der Product kommet +/ und daß wann sie ungleich seynd/ der Product kommet —. 15.

Soll man multipliciren + a mit + b oder — a mit — b der Product oder das Facit kommet + ab.

Soll man aber multipliciren + a mit — b, oder — a mit + b, das facit kommet — ab. Dann die Buchstaben nur also bloß beyeinander gesetzet/ heisset multipliciren.

Soll man multipliciren + acd mit — abcd. der Product oder das facit kommet — aabccdd.

DIVISIO.

Hier muß man auch observiren/ daß wann man dividiret + mit +/ oder — mit —/ der quotient kommet +. und wann man dividiret + mit —/ oder — mit +/ der quotient kommet —. 16.

Soll man dividiren + a mit + b. oder — a mit — b. der quotient oder das facit kommet $+\frac{a}{b}$. Wann man aber dividiren soll — a mit + b. oder + a mit — b. das facit ist $-\frac{a}{b}$.

Soll man dividiren + ab mit + a. oder — ab mit — a. der quotient ist + b. Dann diese Divisio gehet auf und bleibet nichts als ein Bruch/ dann man setzet und operiret also 17.

$$\left.\begin{matrix}+ab\\+a\end{matrix}\right\}+b.$$

$\left.\begin{matrix}+ab\\+a\end{matrix}\right\}+b.$ oder $\left.\begin{matrix}-ab\\-a\end{matrix}\right\}+b.$ Oder wann es wie ein Bruch gesetzet wird / also $\frac{ab}{a}$ so darff man nur die gleiche Buchstaben oben und unten wegstreichen / bleibet b.

Soll man aber dividiren +ab mit −a. oder −ab mit +a. der quotient ist −b. eben so verrichtet wie zuvor. Und $\frac{ab-ac}{b-c}$ gibt +a.

RADIX QUADRATA.

18. Weil eine gewisse Grösse mit sich selber multipliciret / einen quadrat zum facit hat / als b mit b, gibt bb. und bc gibt bbcc. so folget daß alle die Buchstäbliche Grössen / da man die Zahl eines jeden darinn begriffenen Buchstabes halbiren kan ein Quadrat ist / als aabbcc. ist ein Quadrat, und aabbccdd ist auch ein Quadrat. &c.

19. Hieraus folget auch daß um die Radix quadrata einer solchen Grösse zu extrahiren / man nur darff die Helffte der Zahl eines jeden Buchstabs nehmen Als die Radix quadrata von aabbcc. ist abc und von bb ist b. und von aabbccdd ist abcd. &c.

20. Nota. In dieser Art calculation, wann ein Buchstab mehr als zwey oder drey mahl beyeinander kommen solte / schreibt man nur einmahl den Buchstaben mit einer kleinen Zahl oben hinter / als an statt aaa, schreibet man a^3 an statt / bbbb, schreibet man b^4. an statt aaa bbbb. schreibet man a^3b^4. &c.

21. Man

Man muß aber auch wohl observiren/daß 21.
ein grosser Unterscheid ist zwischen 2a. und
a^2. zwischen 2b und b^2. Dann 2b ist nur
an statt b+b. aber b^2. ist an statt bb. Wann
aber nun b ∞ 3. so ist b+b. oder 2b so viel
als 6. aber bb. oder b^2. ist so viel als 9. nehmlich 3 mahl 3.

RADIX CUBICA.

Wann ein Quadrat mit seiner Radix multipliciret wird / der Product ist ein cubus, als 22.
aa. mit a multipliciret/das facit a^3. oder aaa. ist ein Cubus, und aabb. mit ab multipliciret, gibt den cubus a^3b^3. &c. Hieraus folget daß alle die buchstäbliche Grössen/da die Zahl eines jeden darinn begriffenen Buchstabes mit 3. auffgehet/lauter cubus seynd. 23.
Darum dann um die Radix cubica einer solchen Grösse zu extrahiren / so darff man nur das drittel der Zahl eines jeden Buchstabs nehmen / so hat man die Radix cubica als die Radix cubica von a^3. oder von aaa. ist a. und von a^3b^3. ist ab &c.

ADDITIO in Brüchen.

Soll man addiren $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ so ist die sum̃a 24.
$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Soll man addiren $\frac{a}{b}$ mit $-\frac{c}{d}$ die sum̃a ist $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$

Soll

Soll man aber addiren $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{b}$ so ist die summa $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ oder $\frac{a+c}{b}$

SUBTRACTIO in Brüchen.

25. Soll man subtrahiren $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$ so ist der Rest $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$

Soll man aber subtrahiren $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{b}$ so ist der Rest $\frac{c-a}{b}$

MULTIPLICATIO in Brüchen.

26. Soll man multipliciren $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ so kommet der Product $\frac{ac}{bd}$ und so mit den andern allen. Wann man nemlich die zwey Zehler miteinander multipliciret, und machet einen neuen Zehler darauß / und daß man auch die zwey Nenner miteinander multipliciret und machet einen neuen Neñer drauß.

27. Soll man aber multipliciren $\frac{a}{b}$ mit a. so ist es eben als wann es wäre mit $\frac{a}{1}$ so kommet das facit $\frac{aa}{1b}$ oder $\frac{aa}{b}$ dann 1. wird allzeit bey einem Buchstab verstanden / wo keine Zahl davor stehet.

28. Soll

Soll man multipliciren $\frac{a}{b}$ mit b, so kommet $\frac{ab}{b}$ oder a. allein / weil ein Bruch oben und unten mit einerley grösse dividiret / ändert ihren werth nicht/darum im vorigen Bruch/ wann ich dividire ab. mit b. so kommet a. und b mit b. so kommet 1. also ist dann der Bruch kommen auf $\frac{a}{1}$ welches so viel gilt als a. allein / weil alle gantze / können allezeit mit dem Nenner 1. geschrieben werden/ wann man will / dann ich kan schreiben $\frac{b}{1}$ an statt b. und auch $\frac{8}{1}$ an statt 8. es bleibet allezeit in seinem Werth. Hieraus folget diese General-Regel, daß wann man einen Bruch mit seinem Nenner multipliciren soll/ so darff man nur den Nenner weg thun/ und den Zehler für das facit geben. Soll ich multipliciren $\frac{ab}{c}$ mit c. so ist das facit ab. Soll ich multipliciren $\frac{7}{8}$ mit 8. so ist das facit 7. &c. 28.

DIVISIO in Brüchen.

Soll ich dividiren $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ so ist der Quotient $\frac{ad}{bc}$. Wann man nehmlich den Zehler des dividendus multipliciret mit dem 29.

Nenner des divisors, und machet daraus einen neuen Zehler / und daß man auch den Nenner des dividendus multipliciret mit dem Zehler des divisors, und machet daraus den neuen Nenner.

RADIX QUADRATA in Brüchen.

30 Man darff nur die Radix des Zehlers nehmen und einen neuen Zehler daraus machen / und die Radix des Nenners / und einen neuen Nenner daraus machen / dieser neue Bruch ist die Radix des Ersten / als die Radix Quadrata von $\frac{aa}{bb}$ ist $\frac{a}{b}$. Von $\frac{a^4bb}{cc}$. ist $\frac{aab}{c}$. und so mit den andern allen.

RADIX CUBICA in Brüchen.

31. Man darff auch nur die Radix cubica des Zehlers nehmen und einen neuen Zehler daraus machen / und eben auch die Radix cubica des Nenners und einen neuen Nenner daraus machen / so ist dieser neue Bruch die Radix cubica des Ersten. Als die Radix cubica von $\frac{a^3}{b^3}$ ist $\frac{a}{b}$. und von $\frac{a^3b^6}{c^3}$ ist $\frac{abb}{c}$ und so mit den andern allen. Nun wollen wir zu unserm rechten Zweck der Proportion oder Ebenmäßigkeit schreiten.

Caput II.

Von dem Gantzen und dessen Theilen.

32. Eine

Eine Grösse wird ein gantzes genen- 32.
net in Ansehung einer andern Grösse
die kleiner ist; und eine kleine Grösse
wird Theil genennet in Ansehung einer
Grössern. Als 8. wird ein gantzes genen-
net in respectu 2. und 2. wird ein Theil von
8. genennet.

Wann eine Grösse eine andere Grösse et- 33.
liche mahl accurat und ohne Rest in sich hält/
so wird diese Erste multiplex oder vielfältig
genennet. Also ist 12. multiplex von 4. Und
diese Grösse die so accurat etliche mahl in der
andern begriffen wird / wird pars aliquota
der Ersten genennet/ welches wir auf Teutsch
nennen wollen ein auffgehendes Theil. Al-
so ist 4. ein auffgehendes Theil von 12. Aber
5. ist so kein auffgehendes Theil von 12.

Man saget auch / daß ein auffgehendes
Theil sein Vielfach messet/ um zusagen/ daß
es drinn auffgehet. Daß 4. messet 12. aber
nicht daß 4. messet 10.

Ein gemein auffgehendes Theil oder 34.
gemein Maaß/ ist so eine Grösse/ welche ein
auffgehendes Theil ist zwoer andern. Also
ist 4. ein gemein auffgehendes Theil von 12.
und von 8. aber nicht von 12. und von 10.

Diese Grösse/ welche ein gemein auffge- 35.
hendes Theil/ oder gemein Maaß haben/
werden commensurabiles genennet/ welches
wir gemeinmäßlich auf Teutsch nennen
können / als da seynd alle Zahlen gegenein-

der / welche alle die Einheit unitatem für gemein Maaß habẽ/oder wo es Brüche seynd/ können sie doch zu einem gemeinen Nenner gebracht werden / und ist alsdann die Einheit aus dem Nenner das gemein Maaß. Aber die Grösse die kein gemein Maaß mit einander haben / werden incommensurabiles genennet / oder auf Teutsch ungemeinmäßlich.

36. Zwey aufgehende Theile seynd **gleichtheilend** / wann sie gleicherweise in ihrem Vielfach begriffen seynd. Also seynd gleichtheilende aufgehende Theile 2. und 3 von 8. und 12. dieweil 2. viermahl in 8. begriffen ist/ als wie 3. viermahl in 12.

Caput III.

Von den Verhaltnüssen und von der Ebenmäßigkeit oder Proportion.

37. WAnn man eine Grösse mit einer andern vergleichet oder derselben gegenhält / so wird die Erste *antecedens*, oder **Erster Satz** genennet/ und die Andere *consequens*, oder **Andere Satz**.

38. Ratio oder Verhaltnüß ist die Art oder Weise auf welcher der erste Satz den andern Satz / oder aber einige seiner aufgehenden Theilen in sich begreiffet / oder in sich hält. Oder noch deutlicher und eigentlicher zu sagen/

gen / die Geometrische Verhaltnüß ist der quotient oder das facit das heraus kommet / wann man den ersten Satz mit dem andern Satz dividiret. Also / die Verhaltnüß von 12. gegen 4. ist die Art auf welcher 12. begreiffet in sich 4. und weil 12. die 4. dreymal in sich begreiffet / so saget man / diese Verhaltnüß zu beschreiben / daß 12. dreyfach seye von 4. und kürtzer kan man sagen / daß der Werth dieser Verhaltnüß ist 3. weil 12. dividiret mit 4. gibt 3. Auf gleiche Weise die Verhaltnüß von 8. gegen 12. ist die Art auf welcher 8. ein aufgehendes Theil von 12. in sich begreiffet / und weil 8. zweymahl 4. in sich begreiffet / welches das drittel von 12. ist / so beschreibet man diese Verhaltnüß / wann man saget / daß 8. die zwey drittel von 12. ist. Oder kürtzer / der Werth dieser Verhaltnüß ist $\frac{2}{3}$ weil 8. dividiret mit 12. gibt den quotient $\frac{2}{3}$. dann um 8. mit 12. zu dividiren / muß ich schreiben $\frac{8}{12}$ dessen der quotient oder die kürzeste Beschreibung ist $\frac{2}{3}$. eben also die Verhaltnüß von ab gegen ad ist $\frac{ab}{ad}$ oder kürtzer / ihr Werth ist $\frac{b}{d}$. Also wollen wir dann diese letzte und kürtzeste Beschreibung seiner Verhaltnüß nennen / den Werth oder

den quotienten einer Verhaltnüß / oder auch offt die Verhaltnüß selbsten.

39. Es seynd zweyerley Verhaltnüssen / als nehmlich **gemeinmäßliche** / und **ungemeinmäßliche**.

49 Die gemeinmäßliche ist diese / wo der erste Satz den andern Satz / oder doch einige seiner aufgehenden Theile etliche mahl in sich hält accurat und ohne Rest / oder kurtzer / es ist diese / deren werth oder quotient kan mit Ziffern beschrieben werden. Also ist die Verhaltnüß von 12. gegen 4. gemeinmäßlich / weil die Ziffer 3. der quotient davon ist / und auch weil der ander Satz in dem ersten dreymahl begriffen ist; und noch / weil auch ein Maaß von einem Schuh alle beyde Sätze accurat und ohne Rest könte abmessen. Eben deßgleichen die Verhaltnüß von 6. gegen 9. ist auch gemeinmäßlich / weil 6. zweymahl das drittel von 9. accurat in sich hält. Oder weil die Ziffer oder der Bruch $\frac{2}{3}$ der Werth davon ist. Oder endlich / weil ein Maaß von einem Schuh alle Sätze accurat und ohne Rest könte abmessen. Endlich die Verhaltnüß von $\frac{1}{3}$ gegen $\frac{2}{5}$ ist auch gemeinmäßlich aus allen dreyen vorhergehenden Uhrsachen ob man sie gleich nicht so leichtlich begreiffen kan / hier aber folgen sie. 1°. weil $\frac{1}{3}$ fünffmahl

das

das Sechstheil von $\frac{2}{5}$ in sich begreiffet. 2°. Weil der Werth oder der quotient dieser Verhaltnüß ist die Ziffer oder der Bruch $\frac{5}{6}$. Endlich weil ein Maaß von $\frac{1}{15}$ Schuh / alle beyde Sätze accurat und ohne Rest könte abmessen / dann so ein Maaß würde fünffmahl in $\frac{1}{3}$ komen und sechsmahl in $\frac{2}{5}$. Daraus siehet man endlich / daß wann alle beyde Sätze einer Verhältnüß mit Ziffer können vorgestellet werden / so ist diese Verhaltnüß gemeinmäßlich / aber es ist nicht nöhtig daß man alle diese Uhrsachen allemahl betrachte / eine ist genug / weil eine ohne die andere nicht seyn kan.

Die **ungemeinmäßliche Verhaltnüß** ist wann der erste Satz den andern / noch keine Zahl von seinen aufgehenden Theilen accurat in sich halt / also daß nichts überbleibet. Als wann ich die Grösse c. in solche auffgehende Theile als ich im̃er wil abtheile / uñ daß die Grösse a. keine Zahl von solchen auffgehenden Theilen accurat und ohne Rest in sich hält; so wird die Verhaltnus von a gegen c. ungemeinmäßlich genennet / und alsdann wird es sich auch finden / daß keine Ziffer / es mag seyn Gantze oder Brüche / den Werth oder den quotient dieser Verhaltnüß werden können geben; daß kein Maaß müglich ist zu finden / welches diese beyde Grössen accurat 41.

ausmesset /

ausmesset/ und endlich werden diese Sätze a. und c. nicht alle beyde können mit Ziffern vorgestellet werden.

42 Aber weil man begreiffet daß die Grössen C. in unendlich kleine Theile zertheilet werden kan/ wañ a gar keine von solchen Theile accurat in sich hält / so wird es doch nur fehlen an einem Stück oder Rest von so einem Theil/welches/weil es klein ist/kan für nichts gesetzet werden / und wird alsdann die Verhaltnüß von a. gegen c. als gemeinmäßlich angesehen werden können. Deßwegen wollen wir hier von keiner andern Verhaltnüß reden als von der gemeinmäßlichen.

43 Zwo Verhaltnüssen seynd gleich/wañ ihr quotient oder werth einander gleich seynd. Also ist die Verhaltnüß von 8. gegen 2. gleich der Verhaltnüß von 12. gegen 3. weil der quotient auf beyden Seiten 4. ist. Eben also ist die Verhaltnüß von 4. gegen 6. gleich der Verhaltnüß von 10. gegen 15. weil der quotient auf beyden Seiten ist $\frac{2}{3}$.

44 Die Gleichheit zwoer Verhaltnüssen heisset *proportio* oder Ebenmäßigkeit / und diese Grösse unter welchen ist diese Gleichheit zwoer Verhaltnüssen werden *proportioni*rte/ oder ebenmäßige Grösse genennet/welches also kan vorgestellet werden mit Ziffer / 4. 6:: 10. 15. und mit Buchstaben also a. b:: c. d. Das ist/ 4. verhält sich gegen 6 / als wie 10. gegen 15. Oder wie wir sonst pflegen zu sagen/

gen 4. stehet zu 6. als wie 10. zu 15. und a. zu b. wie c. zu d. Man kan auch die proportion oder Ebenmäßigkeit so vorstellen $\frac{4}{6} \infty \frac{10}{15}$. und $\frac{a}{b} \infty \frac{c}{d}$. das ist / der quotient von 4. dividiret mit 6 / ist gleich dem quotient von 10. dividiret mit 15. und / der quotient von a. dividiret mit b. ist gleich dem quotient von c dividiret mit d. dann das alles hat einerley Verstand und einerley Meinung.

Weil nun eine Ebenmäßigkeit zwo Verhaltnüssen in sich hält / und eine jede Verhaltnüß zwey Sätz / nehmlich einen ersten Satz und einen andern Satz; so folget darauß / daß eine Ebenmäßigkeit oder proportio vier Sätze haben muß / zwey erste Sätze und und zwey andere Sätze. 45.

Der erste und letztere Satz einer proportion werden genennet die Ausserste / und die zwey andere die Mittelste. 46.

Wann die zwey mittelste einander gleich seynd / oder (welches eben eins ist /) wañ drey Sätze eine proportion machen können / so wird sie alsdann genennet / proportio continua, oder wie wir es verteutschen wollen / gebundene Ebenmäßigkeit. Als 4. 6 : : 6. 9. welches man auch so vorstellet ÷ 4. 6. 9. 47.

Wann eine proportio continua über mehr als über 3 Sätze sich außstrecket / so wird sie genennet *Progressio*, welches wir Fortgang / verteutschen wollen / als ÷ 1. 2. 4. 8. 16 etc. 48.

C 49. Zwo

49. Zwo Verhaltnüsse seynd ungleich / wann ihre quotient ungleich seynd / und diese ist die gröste die den grösten quotienten hat. Wie der quotient gemacht oder gefunden werde/ könnet ihr sehen no. 38.

50. Wañ 4 Grössen vorgestellet werden/ um zu wissen ob sie ebenmäßig seynd oder nicht/ machet nur n. 38. den quotient einer jeden Verhaltnüß / wann die quotient gleich kommen/so seynd selbige Grössen ebenmäßig/wo nicht/so seynd sie es nicht. Es werden zum Exempel diese Grössen 4.6.10.15. vorgestellet um zu wissen / ob sie ebenmäßig seynd. Ich mache den quotient von $\frac{4}{6}$ der ist $\frac{2}{3}$ und auch von $\frac{10}{15}$ der ist auch $\frac{2}{3}$. Daraus sehe ich/ daß solche Grössen ebenmäßig seynd / und also daß 4. 6 :: 10. 15.

51. Wann aber die vier gegebene Grössen keine Zahlen wären / sondern Linien oder sonst was/und daß man die zwey andere Sätze in gleichthe lende aufgehende Theile zertheilet hätte. Wann alsdann die ersten Sätze die aufgehende Theile ihrer andern Sätze mit einigem Rest begreiffen/so ist man sicher/daß diese Grösse nicht proportionirt seynd/wann/ (die Rest ungeachtet/) die erste Sätze die gleichmessende aufgehende Theile ihrer andern Sätze nicht gleicherweise in sich begreiffen. Wo aber die ersten Sätze gleicherweise selbige Theile begreiffen mit einigem Rest/ so muß man die zwey anderen Sätze in

andere

andere aufgehende Theile zertheilen/die kleiner seynd als dieser Rest/ und diese Examinirung wiederhohlen. Und wo man beweisen kan/daß diese Zertheilung geschehen mag in solche gleichtheilende aufgehende Theile wie man immer will/ so werden doch allezeit die erste Sätze die Theile ihrer andern Sätze gleicherweise begreiffen / (diese kleine Rest ungeachtet/) das ist genug um zu wissen/daß solche vier Grössen demonstrativè ebenmäßig seynd.

Man saget vier Sätze stehen in wiederkehriger Ebenmäßigkeit/wann der Erste stehet zu dem Vierten / wie der Dritte zu dem Andern; oder wann der Erste stehet zu dem Dritten / wie der Vierte zu dem Andern. Und so seynd die vier Zahlen 2. 6. 3. 4. oder auch 2. 6. 4. 3. 52.

Caput IV.

Von der Art zwo Grössen zu verändern/ ohne daß ihre Verhaltnüß verändert werde.

ZWo Grössen können verändert werden / ohne daß ihre Verhaltnüß verändert werde / auf viererley Weise. 53.
Nehmlich/ wañ man ihnen zusetzet/ oder von ihnen abziehet zwo andere Grössen / welche gleiche Verhaltnüß gegen einander haben/ mit den zwo vorgegebenen ; Oder wann

man sie multipliciret oder dividiret mit einer einigen Grösse.

Eher wir aber schreiten zur Erklärung und zum Beweiß der Eigenschafften der Geometrischen Verhaltnüß und proportion, so wollen wir sagen / daß diese materi eine so grosse affinität und Verwandschafft mit der Vernunfft des Menschen hat / daß es kaum nöhtig ist / Beweißthümer und demonstrationes zu gebrauchen / um ihre vornehmste und nöhtigste Eigenschafften einem vernünfftigen Menschen / dem sie nur recht erkläret und beschrieben werden / glaubhafftig zu machen / darum werden die Personen / die ein wenig scharffsinnig seynd und eine gute Vernunfft haben / nicht sehr zu tadeln seyn / wann sie schon die demonstrationes übergehen und sich mit unsern folgenden Beschreibungen und Erklärungen begnügen lassen. Damit aber die Gelehrte von Profession, nicht über uns murren / so wollen wir doch selbige nöthige Demonstrationes geben so kurtz als es immer müglich ist / und um desto leichter zu diesem Zweck zu kommen / so wolle man nur folgende vier Grund-Sätze als natürlich klar annehmen / und derer nicht vergessen.

54. 1°. Gleiche Verhaltnüßen haben gleiche Quotient.

55. 2°. Gleiche Grössen können nicht quotienten seyn / als von gleichen Verhaltnüssen.

56. 3°. Wann die Verhaltnüß von a. gegen b. gleich ist der Verhaltnüß von c gegen d; so

so ist auch die Verhaltnüß von b. gegen a. gleich der Verhaltnüß von d gegen c.

Wann gleiche Grössen gleicherweise tractiret werden durch Mittel anderer gleichen Grössen/oder allein in sich selbsten/was heraus kommen wird/muß auch gleich seyn. 57.

Lemma. Der erste Satz einer Verhaltnüß/ist gleich dem product des andern Satzes mit dem quotient selbiger Verhaltnüß. 58.

Beweiß. Es seye diese Verhaltnüß von a. gegen b und der quotient darvon werde genennet q. so wird man sehen durch No. 38. und 44. daß/weil der Werth einer Verhaltnüß/allezeit gleich ist ihrem Quotient, so ist dann $\frac{a}{b}$ ∞ q. und wann das ist / so wird man finden durch No. 57. das auch a ∞ b q. welches zu beweisen war. Weil man um diese Verwandelung zu thun / nur die zwo gleiche Grösse $\frac{a}{b}$ und q. eine jede mit b. multipliciren muß / wie gewiesen worden No. 15. und 28. Ein jeder Verständiger wird auch von ihm selber mercken/ daß/was wir hier beweisen/nichts anderst ist/als diese beständige Warheit/ welche zum Voraus genommen wird bey der Probe der gemeinen Division in der Rechenkunst; nemlich/ daß der Product des Quotient einer Division mit dem Divisor, gleich ist dem Dividendus.

Hieraus folget / daß man auf folgende weise die Sätze einer Verhaltnüß schreiben 59.

 kan.

kan. Als nehmlich/es seyen die zwey Sätze solcher Verhaltnüß a. und b. und werde ihr quotient genennet q. so kan man schreiben an statt a. b. diese zwey Sätze b q. b.

60 Und gesetzt man hätte einen solchen Geometrischen Fortgang $\div$ a. b. c. d. e. &c. aus vorigem Fundament, könte man ihn so schreiben bq. b. $\frac{b}{q}$ $\frac{b}{qq}$ $\frac{b}{q^3}$ &c. Nun wollen wir zu unserm Zweck fort schreiten.

61. I. Wann man zu zweyen Grössen zwo andere addiret, welche mit den zwo ersten gleiche Verhaltnüß haben / so werden ihre Summen eben diese Verhaltnüß haben.

Beweiß. Es seye die vorgegebene Verhaltnüß die von a. zu b. und die ihr gleich ist von c. zu d. so soll man beweisen / daß a + c. b + d :: a. b. Es seye dann $\frac{a}{b} \propto$ q. wie auch $\frac{c}{d} \propto$ q. Ergo d. 59. An statt a. b :: c. d. kan man schreiben bq. b :: dq. d. Also muß man dann beweisen/daß bq + dq. b + d :: a. b. Aber d. 17. man siehet augenscheinlich durch die division, daß der quotient der ersten Verhaltnüß q. heraus kommet / und man hat præsupponiret, q. wäre auch der quotient von a. gegen b. Ergo d. 55. diese Verhaltnüß seynd gleich.

62. Hieraus folget / daß wann man viele gleiche Verhaltnüssen hat/und daß man alle die ersten Sätze zusammen addiret, und alle

die

die andere Sätze auch zusammen/ die Verhaltnüß dieser zwo Summen wird gleich seyn/einer jeden vorgegebenen Verhaltnüß.

II. Wann man von zwo Grössen zwo andere abziehet die mit den zwo ersten eine gleiche Verhaltnüß haben / die zwey Reste werden auch mit dem ersten eine gleiche Verhaltnüß haben. 63.

Beweiß. Wann a. b :: c. d. man soll beweisen daß a — c. b — d :: a. b. Gesetzt daß $\frac{a}{b}$ ∞ q wie auch $\frac{c}{d}$ ∞ q. Ergo d. 59. kan ich schreiben an statt a b :: c. d. daß bq. b :: dq. d. darum ist dann zu beweisen / daß bq — dq. b — d :: a. b. Aber d. 17. man mercket gleich durch die division, daß der quotient der ersten Verhaltnüß ist q. und man præsupponiret/ q. seye auch der quotient von a gegen b. Ergo d. 55. diese Verhaltnüssen seynd gleich.

III. Wann zwo Grössen alle beyde durch eine andere multipliciret werden / diese producten und die zwo erste Grössen werden gleiche Verhaltnüß gegeneinander haben. 64

Dann es seyen diese zwo Grössen b. und d. und die dritte Grösse nach Belieben genommen seye x / so muß man dann beweisen/ daß bx. dx :: b. d. Gesetzt daß $\frac{b}{d}$ ∞ q. so kommet d. 58. b ∞ dq und dqx ∞ bx. so ist dann zu beweisen daß dqx. dx :: b. d. Aber d. 17. man siehet durch die division daß $\frac{dqx}{dx}$ ∞ q. und man

man præsupponiret daß $\frac{b}{d} \propto q$ Ergo d. 55. Es seynd zwo gleiche Verhaltnüße.

65 Wann zwo Grössen alle beyde durch eine andere dividiret werden/ die zwo erste Grössen und die zwey quotienten werden gleiche Verhaltnüß gegeneinander haben.

Beweiß. Es seyen die zwo Grössen b. und d. und ihr divisor nach Belieben genommen x. so muß man beweisen/ daß $\frac{b}{x}.\frac{d}{x} :: b.d.$ Es sey nun $\frac{b}{x} \propto p.$ und $\frac{d}{x} \propto q.$ so ist dann zu beweisen / daß $p.q :: b.d.$ Aber d. 58. $px \propto b.$ und $qx \propto d.$ Ergo $px.qx :: b.d.$ Aber d. 64. $px.qx.p.q.$ Ergo wie man hernach sehen kan d. 70. und es auch natürlich klar ist / weil $px.qx :: b.d.$ und wiederum $px.qx :: p.q.$ so ist dann auch $p.q :: b.d.$ oder $\frac{b}{x}.\frac{d}{x} :: b.d.$ welches zu beweisen war.

66 Aus diesen zweyen Puncten folget / daß zwo Grössen sich gegen einander verhalten/ wie sich verhalten ihre gleichtheilende aufgehende Theile / und wiederkehrig; daß die gleichtheilende aufgehende Theile sich verhalten als wie sich verhalten ihre Vielfach. Also 8. stehet zu 12. wie das Viertel von 8. nemlich 2. stehet zu dem Viertel von 12. nemlich 3. und vice versa. $2.3 :: 8.12.$

Ca-

Caput V.

Eigenschafften der Ebenmäßigkeit und Proportion.

I.

WAnn vier Grössen ebenmäßig seynd/ so wird allezeit geschehen 1°. daß wann der erste Satz der ersten Verhaltnüß gleich ist/ dem ersten Satz der andern/ so wird auch der ander Satz der ersten Verhaltnüß gleich seyn mit andern Satz der andern. 2°. Daß wann der erste Satz der ersten Verhaltnüß grösser ist/ als der erste Satz der andern / so wird auch der ander Satz der ersten Verhaltnüß grösser seyn / als der ander Satz der andern. 3°. Daß wann der erste Satz der ersten Verhaltnüß kleiner ist als der erste Satz der andern/so wird auch der ander Satz der ersten Verhaltnüß/kleiner seyn als der ander Satz der andern. Oder auch Viceversa, daß wann der ander Satz der ersten Verhaltnüß gleich/kleiner oder grösser ist/ als der andere Satz der andern Verhaltnüß/ so muß der erste Satz der ersten Verhaltnüß auch gleich/kleiner oder grösser seyn/ als der erste Satz der andern Verhaltnüß. 67

Exempel des ersten Casus 2. 6 :: 2 6.

Exempel des andern Casus 3. 9 :: 2. 6.

Exempel des dritten Casus 2. 6 :: 3. 9.

Beweiß. Wer nur bey ihm selber betrach-

trachten wird/ daß durch die Natur der Verhaltnüß und Ebenmäßigkeiten wie zu sehen N°. 38. und 44 Zwo gleiche Verhaltnüß seynd nichts anders / als zwo Divisiones die einen gleichen Quotient heraus geben/ deren die erste Sätze seynd die Dividendus, und die andere Sätze die Divisores, und daß er in diesen Gedancken lese mit Bedacht die vorigen Eigenschafften / so werden sie ihm so klar und so wahrhafftig vor Augen kommen/ daß es ihm unmüglich seyn wird/ daran zu zweifflen / darum ist keines andern Beweisses hier vonnöthen.

68. Hieraus folget 1°. daß zwo gleiche Grössen zu einer Dritten eine gleiche Verhaltnüß haben / und wiederkehrig ; wann zwo Grössen zu einer Dritten/ eine gleiche Verhaltnüß haben/ so seynd diese zwo erste einander gleich: das ist mit andern Worten : daß wañ zwey gleiche Dividendus, mit einem gleichē Divisor dividiret/ haben gleiche Quotiens; und wañ zwey Dividendus mit einerley Zahl dividiret / einen gleichen Quotiens geben / so müssen diese Dividendus gleich gewesen seyn.

69. 2°. Daß wann zwo Grössen ungleich sind / die gröste hat eine grössere Verhaltnüß als die kleineste gegen einer Dritten; und wiederkehrig / daß unter zwo ungleiche Grössen / diese ist die gröste/ zu welcher eine Dritte die kleineste Verhaltnüß hat / und vice versa, diese ist die kleineste zu welcher eine Dritte die gröste Verhaltnüß hat. Das ist

ist/ mit andern Worten/daß wann zwey Dividendus ungleich seynd und daß sie alle beyde mit einerley Divisor dividiret werden / so wird der Quotient des grösten Dividendus grösser seyn als der Quotient des kleinesten: und wiederkehrig / daß wann einerley Grösse/mit zwo anderen ungleichen dividiret wird/ so ist dieser Divisor der gröste/wo der Quotient am kleinesten kommet / und hingegen dieser Divisor der kleineste / wo der Quotient am grösten kommet.

II. Wann zwo Grössen gegen einander 70
stehen / als wie zwo andern auch gegen einander / und wiederum daß diese letzte zwo gegen einander stehen als wiederum zwo andere gegeneinander / so stehen auch die zwo Erste gegeneinander / als wie die zwo letzte. Das ist / wann

$\frac{2}{3} \backsim \frac{4}{6}$ und daß auch $\frac{4}{6} \backsim \frac{8}{12}$ so ist auch $\frac{2}{3} \backsim \frac{8}{12}$.

welches so klar ist/ d. ax. III. daß es kein Beweiß nöthig hat / und wird auch so vorgestellet. 2. 3 :: 4. 6 :: 8. 12.

III. Wann vier Grösse ebenmäßig seynd/ 71
so ist der Product der zwo äussersten gleich dem Product der zwo mittelsten.

Exempel 2. 6 :: 3. 9.

product 18. der mittelsten.

product 18. der äussersten.

Beweiß. Es seye a. b :: c. d. das ist/ $\frac{a}{b} \propto \frac{c}{d}$. wie zu sehen N°. 44. weil nun diese zwey Ding gleich seynd / multipliciret sie alle beyde mit bd. durch N°. 15. und 28. so wird kommen d. N°. 57. ad $\propto$ bc. welches zu beweisen war.

Anderst. Es sey $\frac{a}{b} \propto q$. so ist dañ auch d. n.44. $\frac{c}{d} \propto q$. uñ kan ich dann d. 59. meine proportion so schreiben bq. b :: dq. d. Nun soll man beweisen daß bdq $\propto$ bqd. das ist aber augenscheinlich / weil es eben die producent seynd. Ergo &c.

72 Hieraus folget / daß in einer gebundenen proportion, der product der äussersten gleich ist dem Quadrat deß mittelsten Satzes. Als wann ∺ a. b. c. so ist ac $\propto$ bb.

73 IV. Wañ vier Grössen ebenmäßig seynd/ und werden multipliciret mit vier andern/ die auch ebenmäßig seynd/ nehmlich eine Jede mit ihrem Correspondent, die vier product werden wiederum ebenmäßig seyn.

Es seyen gegeben	2. 3 :: 4. 6.
die werden multipliciret mit	4. 2 :: 10. 5.
die Product seynd	8. 6 :: 40. 30.

Beweiß.

Gesetzt man hat	a. b :: c. d.
und noch	e. f :: g. h.

Und man soll beweisen/daß ae. bf. :: cg. dh.

Es

Es seye dann $\frac{a}{b} \infty q$. und dann auch $\frac{c}{d} \infty q$

Es seye auch $\frac{e}{f} \infty r$. Wie auch $\frac{g}{h} \infty r$. so kan man dann d. N°. 59. an statt der zwey vorigen also schreiben: bq. b :: dq. d.
fr. f :: hr. h.

so muß man dann beweisen/ daß bqfr. bf :: dqhr. dh. aber der product der mittelsten Sätze bfdqhr. ist gleich/dem product der äussersten bqfrdh Ergo durch die umgekehrte deß d. N°. 71. die natürlich klar aus derselben folget/ sind diese auch ebenmäßig.

Hieraus folget 1. daß wann vier Grössen ebenmäßig seynd/so seynd ihre Quadrat und cubus auch ebenmäßig. 74

dann wann 2. 3 :: 4. 6.
multipliciret mit 2. 3 :: 4. 6.

kommen die product 4. 9 :: 16. 36. Quadr.
und die Cubus 8. 27 :: 64. 216. &c.

Es folget 2tens wiederkehrig/ daß wann die Quadrat oder Cubus ebenmäßig seynd/ so seynd ihre Radices auch ebenmäßig. 75

V. Wann vier Grössen ebenmäßig seynd/ der product der ersten Sätze miteinander stehet zu dem product der andern Sätze miteinander / als wie der Quadrat eines ersten Satzes zu dē Quadrat seines andern Satzes. 76

Beweiß. Dieses folget wiederum aus dem N°. 73. dann wann a. b :: c. d.
So ist auch a. b :: a. b.

Ergo d. N°. 73. aa. bb. :: ac. bd.

Oder wiederum/ wann a. b :: c. d,
So ist auch c. d. :: c. d.

Ergo d. N°. 73. ac.bd :: cc. dd.
welches zu beweisen war.

77 VI. Wann drey gleiche Verhaltnüßen nacheinander folgen/ der product der drey ersten Sätze stehet zu dem product der drey andern Sätze als wie der Cubus eines ersten Satzes/zu dem Cubus seines andern Satzes.

Beweiß. Das folget wiederum aus dem N°. 73.

Dann wann a. b :: c. d :: e. f.
So ist auch a. b :: a. b.

Ergo durch N°. 73. aa. bb :: ac bd.
wiederum d. n. 70. so ist auch a b :: e. f.

Ergo durch N°. 73. a^3. b^3 :: ace. bdf.
welches zu beweisen war/dann a^3. ist der Cubus eines ersten Satzes/ b^3. der Cubus eines andern Satzes/ ace. der Product der drey ersten Sätze/ und bdf. der Product der dreyen andern Sätze.

78 Aus den n. 65. 76. und 77. folget/ daß wann drey Grössen als a. b. c. in einer gebundenen Ebenmäßigkeit stehen/das ist/daß ÷ a. b. c. oder daß a. b :: b. c. so stehet der □ der ersten zu dem □ der andern/ wie die Erste zu der Dritten/das ist/aa. bb :: a. c.

Dann d. No. 76 aus dieser Ebenmäßigkeit a. b :: b. c. folget daß ab. bc :: aa. bb. Aber d. No. 65. ab. bc :: a. c. Ergo d. N°. 70. aa. bb :: a. c. Welches zu beweisen war.

Eben

Eben auf die Art wird man beweisen/ daß wann vier Grössen als a. b. c. d. in einer gebundenen Ebenmäßigkeit stehen/ das ist/ daß a. b :: b. c :: c. d. so ist der Cubus der ersten zu dem Cubus der andern / wie die erste zu der vierdten / das ist/ $a^3. b^3$ :: a. d.

Dañ d N°.77. Aus dieser Ebenmäßigkeit a b :: b. c :: c. d. folget daß abc. bcd :: $a^3. b^3$. Aber d. N°. 65. abc. bcd :: a. d. Ergo d N°.70. $a^3. b^3$ :: a. d. W. Z. B. W.

Ratio composita, oder vereinigte Verhaltnüß von vielen andern / ist/ wann die Product ihrer gleich benandten Sätze eine neue Verhaltnüß machen. Als die vereinigte Verhaltnüß von 2. gegen 4. und von 5. gegen 7. ist die Verhaltnüß von 10. gegen 28 nehmlich die Verhaltnüß des Producks der zwey ersten Sätze / 2. und 5. der da ist 10/ gegen dem Product der zwey andern Sätze/ 4. und 7. der da ist 28. 79

VII. Wann eine Verhaltnüß composita ist aus vielen andern / und daß eine andere Verhaltnüß auch Composita ist/ aus vielen andern Verhaltnüssen die gleich seynd / und die in gleicher Zahl mit denen die in der ersten vereiniget seynd / in welcher Ordnung sie auch mögen gesetzt worden seyn / so sage ich/ daß diese zwo vereinigte Verhaltnüsse auch einander gleich seynd. 80

Beweiß. Es seye die Verhaltnüß von 2. gegen 4. eine Composita aus den zwoen 2. gegen 3. und 3. gegen 4. Und seye auch die Ver-

Verhaltnüß von 6. gegen 12. eine Composita aus den zwoen 6. gegen 8. und von 8. gegen 12. und daß auch zugleich 2. 3 :: 8. 12.
und 3. 4 :: 6. 8.
so stehet zu beweisen/ daß die zwo Compositæ 2. gegen 4. und 6. gegen 12. auch gleich seynd.

	2. 3 :: 8. 12.
Durch N°. 73. so kan	3. 4 :: 6. 8.
man sagen / daß	6. 12. :: 48. 96.

Setzet aber nun also	2. 3. 6 8.
	3. 4. 8. 12.

und man soll beweisen / daß 6. 12 :: 48. 96. welches ein Ding ist / ob gleich die zwo letzte Verhaltnüß/die da vereiniget werdẽ/versetzt worden seynd / nun aber wann ich die Sätze der ersten vereinigten Verhaltnüß von 6. gegen 12. dividire mit 4 so wird ihre Verhaltnüß d N. 65. dadurch nicht geändert / und kommet alsdann 2. gegen 4; und eben darum/ wann ich die Sätze der andern vereinigten Verhaltnüß von 48. gegẽ 96. dividire mit 24. so bleibt wiederum d. n. 65 ihre Verhaltnüß/ 2. gegen 4. / und weil dieses Raisonnement in allen Fällen kan gebraucht werden/ so ist die Sach eine allgemeine Wahrheit.

Caput

Caput VI.

Art und Weise vier ebenmäßige Grössen auf unterschiedene Weise zu vergleichen / also daß allezeit eine Proportio unter ihnen bleibet.

VIer ebenmäßige Grössen können auf achterley Art versetzet werden / und doch immer ebenmäßig bleiben / ohne daß man ihnen etwas zusetzet / oder von ihnen etwas abziehet / dann so lang die äusserste / äusserste oder mittelste bleiben / so lang bleiben sie auch ebenmäßig durch die umgekehrte des N°. 71. Also: 81.

1°. Hypothesis,	a. b :: c. d. 2. 6 :: 3. 9	Erste Satzung.
2°. Æquivalens,	c. d :: a. b. 3. 9 :: 2. 6.	gleichgeltend.
3°. Invertendo oder permutando,	b. a :: d. c. 6. 2 :: 9. 3.	umgekehret.
4°. Æquivalens,	d. c :: b. a. 9. 3 :: 6. 2.	gleichgeltend.
5°. Alternando,	a. c :: b. d. 2. 3 :: 6. 9.	umwechselend.
6°. Æquivalens,	b. d :: a. c. 6. 9 :: 2. 3.	gleichgeltend
7°. Inversio alterni,	c. a :: d. b. 3. 2 :: 9. 6.	Umkehrung der Umwechselung.

 8°. Æqui-

8°. Æquivalens, $\left\{\begin{matrix} d.\ b :: c.\ a. \\ 9.\ 6 :: 3.\ 2 \end{matrix}\right\}$ gleichgeltend.

Wann man aber die vier ersten Sätze miteinander addiren / oder von einander subtrahiren darff / so können sie noch auff dreyerley Art versetzet werden / wie folget.

Hypothesis, $\left\{\begin{matrix} a.\ b :: c.\ d. \\ 2.\ 6 :: 3.\ 9. \end{matrix}\right\}$ Erste Satzung.

82 Componendo, $\left\{\begin{matrix} a+b.\ b :: c+d.\ d. \\ 8.\ 6 :: 12.\ 9. \end{matrix}\right\}$ oder $\left\{\begin{matrix} a+b.\ a :: c+d.\ c. \\ 8.\ 2 :: 12.\ 3. \end{matrix}\right\}$

Beweiß. Man siehet in der ersten Satzung d. n. 71. daß ad $\propto$ bc. und man soll dann beweisen in der folgenden Stellung / wann sie eine Proportion ist / daß bc + bd $\propto$ ad + bd. und das ist augenscheinlich / weil ad $\propto$ bc.

Und in der letzten Stellung muß man beweisen / daß ac+ad $\propto$ ac+bc. und das ist wiederum augenscheinlich / d. n. 57. weil ad $\propto$ bc.

Hypothesis, $\left\{\begin{matrix} a.\ b :: c.\ d. \\ 6.\ 2 :: 9.\ 3 \end{matrix}\right\}$

83 Dividendo. $\left\{\begin{matrix} a-b.\ b :: c-d.\ d. \\ 4.\ 2 :: 6.\ 3. \end{matrix}\right\}$ oder $\left\{\begin{matrix} a-b.\ a :: c-d.\ c \\ 4.\ 6 :: 6.\ 9. \end{matrix}\right\}$

Beweiß. Man siehet in der ersten Satzung d. n. 71. daß ad $\propto$ bc. und man soll beweisen in der folgenden Stellung daß bc — bd $\propto$ ad — bd. das ist aber augenscheinlich / d. n. 57.

weil

weil ad)o bc. und in der letzten Stellung/ muß man beweisen/ daß ac — ad)o ac — bc. und das ist wiederum augenscheinlich / weil ad)o bc.

Hypothesis, { a. b :: c. d.
6. 2 :: 9. 3.

Componendo & dividendo simul. { a + b. a — b :: c + d. c — d. 84
8. 4 :: 12. 6.

Beweiß. Man siehet wiederum d. n. 71. in der ersten Satzung daß ad)o bc. und man soll hier beweisen daß ac + ad — bc — bd)o ac — ad + bc — bd aber das ist wiederum klar d. n. 57. weil ad)o bc.

Caput VII.

Von der Progression oder gebundenen Ebenmäßigkeit.

HIervon wollen wir hier nicht weitläufftig handeln / aber doch können wir nicht unterlassen so viel darvon zu sagen/ als nöthig ist/ um zu der Summa einer Progression, so kurtz als es möglich ist / zu kommen / wiewohl der Beweiß nicht soll gegeben werden / weil es ein wenig zu tieff aus der Algebra hergesucht wird / welche wir völlig hier zu tractiren / nicht vorhaben.

In allem fallenden Geometrischen 85
Fortgang / der erste Satz weniger den andern/ stehet zu dem ersten / wie der erste Satz

weniger den letzten zu der Summa aller Sätze zusammen weniger den letzten.

Es seye dieser Fortgang ∺ 81. 27. 9. 3. 1. so sage ich daß 81. weniger 27. das ist/54. stehet zu 81:: wie 81. weniger 1. das ist/ 80. gegen der Summa aller Sätze weniger 1. das ist 120. dann setzet diese Zahlen und tractiret sie d. n. 62. wie folget/so wird folgende Ebenmäßigkeit heraus kommen:

	81.	27.
::	27.	9.
::	9.	3.
::	3.	1.

120. 40 :: 81. 27.

Das ist/die Summa aller ersten Sätze/stehet zu der Summa aller andern Sätze / wie einer der ersten Sätze zu seinem andern Satz. Aus dieser Proportion aber kommet Dividendo d. n. 83. die folgende 80. 120 :: 54. 81. und diese hier d. n. 80. nach dem Æquivalens oder gleichgeltend gemacht / kommet 54. 81 :: 80. 120. die im Beweiß-Stück vorgegeben war.

Beweiß mit Buchstaben. Es seye die Progressio ∺ a. b. c. d. e. durch N°. 60. kan man sie so schreiben ∺ bq. b. $\frac{b}{q}$. $\frac{b}{qq}$. $\frac{b}{qqq}$. und wann man hieraus die drey ersten Sätze der Proportion die da soll bewiesen werden/formiret/so werden sie also kommen bq—b.bq :: bq—$\frac{b}{qqq}$ und hieraus durch die Regula de

Try

Try wird der vierdte Satz kommen also/ $bq + b + \frac{b}{q} + \frac{b}{qq}$ nehmlich die gantze Summa aller Sätze weniger den letzten. Welche Generalität beweiset / daß dieses Beweißstück wahr ist/ nicht allein in den fallenden Fortgang / sondern in allerhand Geometrischen Fortgang.

Hieraus folget aber / daß / wann die Progressio unendlich fällt / das ist / wo der letzte Satz in Vergleichung der andern so viel gilt als o. da wird folgende Proportion wahr seyn. 86

Wie der erste Satz weniger den andern/ stehet zu dem ersten; also stehet auch der erste/ zu der Summa der gantzen Progression.

Man kan auch die Summa aller Geometrischen Progression durch folgendes Theorema finden/ welches sehr kurtz vorgeschrieben wird/ das wir aber aus angeregten Uhrsachen hier nicht beweisen. Nehmlich/ wann der allergröste Satz wird genennet v der allerkleineste a. die ratio communis, oder die gemeine Verhältnüß r. (welche gefunden wird/ wann man von zweyen neben einander stehenden Sätzen/ den grösten mit den kleinesten dividiret/) und die Sume wird geneñet S. so wird es sich allezeit finden daß $S \propto \frac{vr - a}{r - 1}$. 87

Und um die Mühe in etwas zu verspahren/ wann man den letzten oder grösten Satz eines steigenden Fortgangs nöthig hat/ 88

um ihre Summa zu finden; wann man weiter noch nennet die Zahl der Sätze t., und und diese Zahl weniger 1. d. oder $t - 1 \propto d$. so wird es sich allezeit finden / daß $v \propto ar^{d}$. oder damit man es besser verehstet/wann die Progression 7. Sätze hätte / so wäre $v \propto ar^{6}$. wann sie 9. Sätze hätte / so wäre $v \propto ar^{8}$. wann sie 24. Sätze hätte / so wäre $v \propto ar^{23}$. und immer so fort.

Problemata, oder Werck-Stück/ betreffend die Geometrische Gleichmäßigkeit.

I.

89 DRey Grössen werden vorgegeben / als 4. 6 :: 10. und man soll eine vierte ebenmäßige finden? multipliciret die zwey äussersten Sätze auf die rechte Hand 6. und 10. mit einander / welche die mittelste in der Proportion seynd / ihr Product d. n. 71. wird auch der Product der zwey äussersten seyn / darum dividiret dann diesen Product 60 mit dem ersten Satz 4. der Quotient 15. wird die vierdte ebenmäßige Grösse seyn die man suchet.

90 II. Zwo Grössen 4. und 6. werden gegeben / und man soll ihnen eine Dritte ebenmäßige finden? Wiederhohlet die andere / nehmlich 6. also 4. 6 :: 6. und suchet wie zuvor eine vierdte proportionirte / so findet ihr 9. für die gesuchte Zahl also 4. 6 :: 6. 9.

III. Zwo Grössen werden vorgegeben/ und man soll zwischen denselben eine Mittel-proportional finden? 91

Multipliciret zusammen die zwo vorgegebene Grösse 4 und 9/ und aus ihrem Product 36 ziehet die Quadrat-Wurtzel 6. diese ist die gesuchte Mittel-proportional dann ∺ 4. 6. 9.

IV. Es werden gegeben der kleineste und der ihm nechstfolgende Satz eines Geometrischen Fortgangs / und auch die Zahl aller Sätze/ und man soll den grösten Satz finden? 92

Man suchet erst die gemeine Verhaltnüß der Progressio, indem man den andern Satz mit dem kleinesten dividiret / hernach wann nur drey Sätze der Progressio wären/ so müste man diese gemeine Verhaltnüß mit sich selber multipliciren/ wo vier Sätze wären/ so müste man diesen Product noch wieder mit der ratione communi multipliciren / wo fünff Sätze wären / noch einmahl eben mit der gemeinen Verhaltnüß multipliciren / und immer so fort / aber endlich müste man allemahl zum Beschluß den letzten Product mit dem ersten und kleinesten Satz multipliciren / so hätte man den grösten und letzten / aber die Compendia oder Verkürtzung müssen mit Worten und Exempel gelehret werden / um die Weitläufftigkeit zu meiden.

Es werden gegeben der erste Satz / der andere Satz/ und der letzte Satz eines Geometrischen Fortgangs / und man soll die Summam aller Sätze finden? 93

Su-

Suchet die gemeine Verhaltnüß/ wie in dem gesagt / multipliciret dieselbige mit dem grösten Satz / von dem Product, ziehet den kleinesten Satz ab / und dividiret den Rest mit der gemeinen Verhaltnüß/ weniger 1; was da kommet/ ist die Summe der gantzen Progressio.

94 Es werden gegeben der erste und der andern Satz eines unendlich fallenden Fortgangs/ und man soll die Summe aller ihrer Sätze finden?

Thut wiederum wie bey N°. 92. gelehret ist / und erinnert euch nur / daß der kleineste Satz hier für 0. geschetzet wird.

Caput VIII.

Von der Arithmetischen Verhaltnüß und Gleichmäßigkeit.

95 Die Arithmetische Verhaltnüß zwoer Grössen/ ist die Differentia derselben/ oder der Rest/ wann die eine von der anderen abgezogen wird. Als/die Arithmetische Verhaltnüß von 11. gegen 7. ist 4.

96 Die Arithmetische Verhaltnüß zwoer Grössen ist gleich der Arithmetischẽ Verhaltnüß zwoer andern / wann die Differentia der zwo ersten/gleich ist der Differentia der zwoen andern. Als die Arithmetische Verhaltnüß von 11. gegen 7. ist gleich der Arithmetischen Verhaltnüß von 13. gegen 9 dann ein jeder Rest ist 4.

Die Gleichheit zwoer Arithmetischen 97
Verhaltnüße wird geneñet Proportio Arithmetica, oder Arithmetische Ebenmäßigkeit. Welche in den vier folgenden Zahlen sich befindet / und wird so vorgestellet 9. 5 : 15. 11. das ist / 9 stehet Arithmeticè gegen 5 / als 15. gegen 11. oder / der Unterscheid zwischen 9. und 5 / ist gleich dem Unterscheid zwischen 15. und 11.

Wann die mittelste Sätze einander gleich 98
seynd / so heisset sie Proportio Arithmetica continua, oder gebundene Arithmetische Ebenmäßigkeit. Also 9. 5 : 5. 1. und wird auch so vorgestellt ÷ 9. 5. 1.

Wann diese gebundene Ebenmäßigkeit 99
sich weiter als über drey Sätze ausstrecket / so wird sie genennet Progressio Arithmetica. Als ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. etc. Man könte sie auf Teutsch nennen Arithmetischer Fortgang.

Eigenschafften.

WAnn man auff folgende Weise / die 100
Arithmetische Proportio vorstellet / so erhellen gleich daraus fast alle ihre Eigenschafften / nehmlich / an statt 5. 9 : 11. 15. also / 5. 5 + 4 : 11. 11 + 4. und an statt 9. 5 : 15. 11. also / 9. 9 — 4 : 15. 15 — 4. dann die Natur dieser Ebenmäßigkeit wird gleich dadurch begriffen / und mit Buchstaben wird sie so vorgestellet / a. a + b : c. c + b. oder auch / a. a — b : c. c — b.

Wann zwo Grössen gegeben werden / als 101

a. und a + b. oder a. und a — b. und daß man zu einer jeden eine dritte Grösse addiret/ als c. oder selbige von einer Jeden abziehet/ so bleiben die Summen/ oder die Reste in ihrer ersten Arithmetischen Verhaltnüß. Dann a + c. a + c + b : a. a + b. Und auch/ a — c. a — c + b : a. a + b &c.

102 Vier Arithmetisch ebenmäßige Sätze/ bleiben immer in einer Arithmetischen Proportion in den acht unterschiedenen Vorstellungen die bey der Geometrischen Proportion notiret worden seynd No. 80. nehmlich permutando, alternando, inversio alterni, und die Æquivalentes / welches augenscheinlich ist/ wann man sie nur mit Buchstaben vorschreibet.

103 Wann vier Sätze Arithmetisch ebenmässig seynd/ und man addiret zu ihnen/ oder subtrahiret von ihnen vier andere Sätze / die auch gleicherweise ebenmäßig seynd / die Sum̃en oder die Reste bleiben noch in Arithmetischer Ebenmäßigkeit. Welches wieder augenscheinlich wird/ durch die schlechte Vorstellung mit Buchstaben / als:

Es seye	a. a + b : c. c + b.
Addiret und subtrahiret	d. d + e : f. f + e.

Die Summa:

a + d. a + d + e + b : c + f. c + f + e + b.

Die Differentia oder Rest:

a — d. a + b — d — e : c — f. c + b — f — e.

104 Wann vier Sätze Arithmetisch ebenmässig

sig seynd / die Summe der zwey mittelsten ist gleich der Summe der zwey äussersten. Daß wird gleich mit Buchstaben augenscheinlich / als / a. a + b : c. c + b. die gemeine Summe ist a + b + c.

Hieraus folget / daß wañ die drey Grössen ÷ a. b. c. eine gebundene Arithmetische Ebenmäßigkeit machen / so ist die Sume der äussersten Sätze gleich dem zweyfach des mittelsten Satzes / das ist / a + c ∞ 2 b. Das erhellet aus dieser Vorstellung ÷ a. a + b. a + 2 b. Die gemeine Summe ist 2 a + 2 b, das zwiefach des mittelsten Satzes. 105

In einem Arithmetischen Fortgang / als ÷ a. a + b. a + 2 b. a + 3 b. a + 4 b. a + 5 b. ꝛc. Die gleich entfernete Sätze seynd auch in Arithmetischer Ebenmäßigkeit / als / der erste stehet zu dem dritten / wie der vierdte zu dem sechsten a. a + 2 b : a + 3 b. a + 5 b oder / der erste stehet zu dem andern / wie der fünffte zu dem sechsten a. a + b : a + 4 b. a + 5 b. und so mit den andern allen. 106

Aus diesen Gründen oder Fundament fliessen alle folgende Werck-Stücke oder Problemata, wiewohl ich den Beweiß davon hier nicht weitläufftig ausführen will / geliebter Kürtze wegen.

Werckstücke oder Problemata.

Es werden drey Grössen gegeben in Arithmetischer Proportion, und man soll die vierdte finden? 107

Als 5. 9 : 8. Addiret zusammen die zwey Sätze 9. und 8. welche die mittelste in der Proportion seynd/ und von ihrer Summe 17. ziehet ab die erste 5. der Rest 12. ist die gesuchte Grösse/ das ist/ 5. 9 : 8. 12.

108 Es werden zwo Grösse vorgegeben 5. und 13. und man soll ein Mittel Arithmetisch-proportional finden?

Addiret die zwo gegebene Grössen zusammen/ thut 18. halbiret das/ so kommet 9. für die gesuchte Mittel-Proportional, das ist/ ÷ 5. 9. 13.

109 Was angehet die Problemata oder Werck-Stücke des Arithmetischen Fortgangs/ Progressionis Arithmeticæ, die wollen wir hier gantz kurtz mit Buchstaben vorstellen/ und zu dem Ende muß man observiren/ daß fünff Dinge hier können betrachtet werden/ nehmlich/ 1. der erste Satz/ 2. der letzte Satz/ 3. die Zahl aller Sätze/ 4. der gemeine Rest/ oder differentia communis, 5 und 5°. die Summe aller Sätze/ welche wir mit Buchstaben/ wie folget/ benennen wollen.

a. Der erste Satz/ und sehr offt der kleineste.
m. Der letzte Satz.
n. Die Zahl aller Sätze.
d. Differentia communis, gemeiner Rest.
S. Die Summe aller Sätze.

Aber Kürtze willen wollen wir noch diese drey Benennungen geben/ nehmlich

b ∞ n — 1. z ∞ a + m.

V. Das Zeichen heist Radix Quadrata.

x ∞ Der

x $\propto$ Der Unterscheid oder der Rest der äussersten Sätze / wenn man nehmlich den kleinesten von dem grösten abziehet.

Nun muß in einem Werck-Stück oder Problema wohl distinguiret werden / was gegeben wird / von dem was man suchet / data, und quæsita. Die Sache aber ist hier so beschaffen / daß wann man unter die fünff vorige Dinge nur drey gibt / welche man will / so kan man durch Rechnung die zwey andern finden / wie folget.

Data.	Quæsita.
a. m. n.	$d \propto \frac{x}{n-1}$. $S \propto \frac{nz}{2}$. oder $\frac{an+mn}{2}$.
a. d. m.	$n \propto \frac{x}{d}+1$. $S \propto \frac{nz}{2}$.
d. n. m.	$x \propto bd$. $a \propto m-x$. $S \propto \frac{nz}{2}$.
a. d. n.	$x \propto bd$. $m \propto a+x$. $S \propto \frac{nz}{2}$.
d. n. S	$z \propto \frac{2S}{n}$. $a \propto \frac{a+m-x}{2}$. $m \propto \frac{a+m+x}{2}$.
a. n. S.	$z \propto \frac{2S}{n}$. $m \propto z-a$. $d \propto \frac{x}{n-1}$.
m. n. S.	$z \propto \frac{2S}{n}$. $a \propto z-m$. $d \propto \frac{x}{n-1}$.
a. d. S.	$m \propto \sqrt{\frac{1}{4}dd+aa-ad+2dS}-\frac{1}{2}d$. $n \propto \frac{2S}{a+m}$.
m. d. S.	$a \propto \frac{1}{2}d+\sqrt{\frac{1}{4}dd+mm+dm-2dS}$. $n \propto \frac{2S}{a+m}$.

In diesen neun Werckstücken oder Problematis bestehet die Auffiösung von allen und jeden curiösen Fragen/ die man gemeiniglich auf die gebundene Arithmetische Ebenmässigkeit pfleget zu thun / davon aber die Exempel hier zu weitläufftig wären / auszulegen/ und die wir für die mündliche Information bey den Curiösen reserviren.

Zugabe. Weil der umgekehrte des n. 71. gebrauchet wird etliche andere zu beweisen/ ob er gleich natürlich klar genug ist / so wollen wir doch seinen Beweiß hier beysetzen/ damit man keinen Zweiffel hierauf vorwenden könne / und solches wollen wir thun/ also:

Man gibt für gewiß / daß ad ∞ bc. und daraus soll man beweisen / daß dann auch a. b :: c. d. Nun aber d. n. 64. a c. b c :: a. b. und eben darum ca. a d :: c. d. Aber weil man setzet / daß ad ∞ bc. so ist dann d. n. 70. ac. b c :: a c. a d. Darum so ist auch d. n. 65. a. b :: c. d. W. Z. B. W.

Ende deß ersten Buchs.

Außle-

Außlegung
einiger Zeichen/
Die wir in folgenden Büchern dieser Elementen noch brauchen wollen.

I.

DJeses Zeichen □ heisset Quadrat, oder Regular-Viereck. Als/ der □ AB ∝ □ BC, das ist / der Quadrat auf die Linie AB. ist gleich dem Quadrat auf die Linie BC.

2. Dieses Zeichen △ heisset Triangel, oder dreyeckichte Figur. Als/ der △ ABC ∝ △ ADC. Das ist/ der Triangel ABC. ist gleich dem Triangel ADC.

3. Dieses Zeichen < heisset Winckel. Als der < ABC ∝ < ADC. das ist / der Winckel ABC. ist gleich dem Winckel ADC.

4. Dieses Zeichen = heisset Parallel oder Ebenweitig. Als / die Linie AB = BC. das ist/ die Linie AB ist parallel oder ebenweitig mit der Linie BC.

5. Dieses Zeichen ⊥ heisset Perpendicular oder Bleyrecht. Als/die Linie AB ist ⊥ der Linie BC. das ist / die Linie AB ist Perpendicular auf der Linie BC.

6. Dieses Zeichen ▭ heisset Rechtwinckelichte Vierung / oder Parallelogrammum rectangulum, oder endlich / der Product zwoer Linien. Als / das ▭ AB. BC. ∞ □ CD. das ist / die rechtwinckelichte Vierung von AB mit BC. oder das Parallelogrammum Rectangulum von AB mit BC. oder der Product von AB mit BC. ist gleich dem Quadrat von CD.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Oder Gründe der Erdmeßkunst.

II. Buch.

DJe Geometria ist eine Kunst/ 110
deren Vorwurff (objectum)
ist die Ausdähnung (extensio.)
Die Ausdähnung hat drey 111
Dimensiones, die Länge / die
Breite/ und die Dicke; oder
man kan sie betrachten/ entweder mit ihren
dreyen Dimension, oder mit zwoen/ oder mit
einer/ oder auch ohne Dimension.

Wann man sie mit ihren dreyen Dimen- 112
sion betrachtet/ so heisset sie alsdann Cörper/
Corpus, als A. fig. 1.

Wann man sie nur mit zwoen Dimension 113
betrachtet/ als Länge und Breite/ so heisset sie
Fläche/ als B fig. 2.

Wann man sie nur mit einer betrachtet/ 114
als die Länge / so heisset sie Linie / als hier C.
fig. 3.

115 Endlich / wann man sie ohne Dimension betrachtet / so heisset sie Tipel oder Punct.

116 Notiret 1°. daß die Linie gerade oder krum ist / wie auch die Oberfläch / welche kan seyn eben oder krum / wenn sie eben ist / so heisset sie Planum, oder ebene Fläch / 2°. Eine Linie kan betrachtet werden / als in einer Fläche gezogen / als A B. fig. 4. oder aus der Fläche / als CD. fig. 5. 3°. Eine Fläche / die um und um geschlossen ist / heisset Figur / oder flache Figur.

Gegenwärtiges Buch wird nur tractiren oder handeln / von den Linien / die in einer Fläche gezogen seynd.

Caput I.

Von den Linien ins gemein Benennungen.

117 DIe Linien seynd gerade oder krum / die gerade Linie ist die / welche (in directum,) gerad vorwertz von einem Punct zum andern gehet / als A B. fig. 6.

118 Die krumme Linie gehet mit Umweg von einem Punct zum andern / als CD. fig. 7.

119 Wir wollen gekrümte Linie nennen / die da bestehet aus vielen geraden Linien / die nicht in directum gegen einander kommen / als EFG. fig. 8.

Eigen=

Eigenschafften.

I.

WAnn man von einem Punct A. zu 120
einem andern B. fig. 9. eine gerade Linie ziehet/und viele andere/die da krümmen auf einerley Seite / oder auch die ekrümt seynd auf einerley Seite/ die kürtze-ste ist die gerade Linie A B. und die längste ist A C B. fig. 9. die sich am meisten von der geraden entfernet.

Hieraus folget / daß die gerade Linie das 121
rechte Maaß ist oder seyn soll / von der Distantz zweyer Punct.

II. Durch zwey Puncte kan man viele 122
krumme Linien ziehen/ aber nur eine gerade.

Hieraus schliesset man 1°. daß die Stel- 123
lung einer geraden Linie/folget aus der Stellung zweyer ihrer Puncten. 2°. Daß eine gerade Linie A B. fig. 10. eine andere gerade Linie CD. nur in einem einigem Punct E. durchschneidet/ dann wann sie selbige in zwey Puncte schneiden solte/ so würdē sie also zwey Punct gemein haben / und wären also übereinander gelegt / und nur eine Linie ausmachen.

III. Wann zwey Punct C. und D. fig. 11. 124
einer geraden Linien / ein jeder gleich entfernet seynd/von zweyen andern Punctē A. und B. auf beyden Seiten gesetzet / so wird ein jeder anderer Punct von selbiger Linie / als E. auch gleich entfernet seyn von A. und B.

Dann die Stellung der Linie CD. folget aus der Stellung zweyer Puncten C. und D. durch n. 123. aber diese zwey Puncte seynd gleich entfernet von A. und von B. Ergo, so ist diese Linie also gerichtet / daß alle ihre Puncte müssen gleich entfernet seyn von A. und von B.

125 Hieraus folget / daß wo man die Linie A B. fig. 12. ziehen wird / so wird sie durch CD. in der Mitte getheilet seyn.

126 Wann ein Punct G. fig. 13. neben der Linie CD. vorhergehender Stellung stehet auf der Seite B. so ist er durch n. 124. näher an B. als an A.

127 Und wann in dieser Fläche der Punct H. so weit von A. als von B sich befindet / so wird die Linie CD. durch diesen Punct H. fahren / wo sie verlängert wird. Dann wann dieser Punct neben der Linie gegen B. wäre / als G, so wäre er wie wir in dem gesehen näher / an B. als an A. welches lauffet wider unsern ersten Satz.

Caput II.

Von den Circkel-Linien.

128 UNter den krummen Linien ist die Circular-Linie die am wenigsten verwirret / Simplicissima, und die einige / die man in der gemeinen Geometrie brauchet.

129 Die Circular-Linie ist eine krumme Linie / die

die auf einer Fläche beschrieben ist/ und deren alle Puncte von einem gewissen Punct C. gleich entfernet seynd. fig. 14.

Dieser Punct C. heisset Centrum; der Raum der in dieser Linie beschlossen ist / heisset Circkel / und die Circular-Linie heisset Umkreiß/ oder Circumferentz. 130

Die gerade Linien CA. CB. CD. fig. 15. die von dem Centro auf die Circumferentz kommen/ heissen Radius, oder halbe Diameter. 131

Die gerade Linien BD. AE. fig. 15. die von einem Punct des Umkreises durch das Centrum auf einem andern Punct des Umkreises fallen, heissen Diameter, auf Teutsch/ Durchschlag. 132

Ein Theil der Circumferentz/ als A B. heisset Arcus, oder Bogen. fig. 16. 133

Die gerade Linie A B. die den Bogen unterspannet/ heisset Chorda. 134

Es ist klar / daß eine Chorda, die nicht durch das Centrum fähret / eben so wohl die Chorda des grossen Bogens A D B. ist fig. 17. als des kleinen A C B. Aber damit wir keinen Zweiffel oder doppelt-sinnige Wörter hier lassen / wollen wir sie allezeit anschauen / als die Chorda des kleinen Bogens A B C. es sey dann/ daß wir uns darüber anderst erklären. 135

Eine gerade Linie/ die den Circkel in einem einigen Punct anstosset / ohne daß sie ihn durchschneidet / wann sie gleich verlängert würde/ heisset Tangens, als hier A B. fig. 18. 136

137 Die Circkel die einen einigen Centrum haben/ heissen Concentricus &c.

138 Aller Circkel Umkreiß wird in 360. gleiche Theile getheilet/ welche gradus genennet werden/ ein jeder Gradus in 60. Minuten / eine jede Minut in 60. Secunden, &c.

Eigenschafften.

I.

139 In einem einigen Circkel / oder auch in gleichen Circkeln seynd alle Radius einander gleich / wie auch alle Diameter, die Gradus, und Minuten seynd darinnen auch gleich / und folglich die Bogen von gleicher Zahl Gradus und Minuten/ und die Bogen deren Chorda gleich seynd/ und die Chordæ deren Arcus gleich seynd/ seynd alle gleich/ welches klar ist durch die überall Gleichförmigkeit (uniformitas) des Circkels. fig. 20.21.

140 Hieraus folget/ daß der Diameter den Umkreiß/ und auch den Circkel selbst in zwey gleiche Theile schneidet.

141 II. Eine gerade Linie AB. kan die Circumferentz des Circkels nicht mehr als in zwey Puncten durchschneiden/ dann das ist klar durch die Natur des Circkels und der geraden Linie. fig. 22.

142 III. In einem Circkel / die gröste Bogen/ (hierdurch verstehe ich doch solche Bogen/ die kleiner seynd als der halbe Umkreiß/) haben auch die längste Chorda, und wiederkehrig / die längste Chordæ unterspannen

auch

auch grössere Bogen / wie in AB. fig. 22. dieses ist klar wie zuvor.

IV. Wañ unter vielen Circkeln die Concentricus seynd / oder die ein gemeines Centrum haben / einer ist / der durch die Radius in gleiche Theile getheilet ist / so werden die anderen alle auch durch diese fortgestreckte Radius (wo es nöthig ist) in eben so viel gleiche Theile getheilet / und darum / wann einer also in Gradus getheilet wäre / so wären sie es alle. fig. 23. solches ist klar wie das vorige. 143

Hieraus folget / daß wo zwey Radius C A. CB. fig. 24. viele Circumferentzen / die ein gemeines Centrum haben / durchschneiden / so werden sie so viel Gradus in einem Umkreiß als in denen andere abschneiden. Klar wie zuvor. 144

V. Zwey Diameter AB. CD. fig. 25. schneiden in einem Circkel ab auf beyden Seiten zwey gleiche Bogen AC. BD. Dann ACB. ist eine halber Umkreiß durch n. 140. CBD. eben deßgleichen; Ergo seynd sie einander gleich / und wann man von ihnen abziehet den gemeinen Bogen CB. so werden auf beyden Seiten überbleiben die zwey gleiche Bogen AC. BD. durch n. 57. 145

Problemata oder Werckstücke.

I.

AUs einem Punct C. fig. 26 der gegeben als Centrum, und mit einer gegebenen Länge A, einen Circkel zu beschreiben? 146

Machet

Machet euren Circkel auf von der Weite A. und setzet dessen eine Spitze in C. und beschreibet also den begehrten Circkel.

147 Es ist natürlich klar. 1°. Daß aus einem einigen Centro, und mit einer einigen Oeffnung man nur einen einigen Circkel beschreiben könne. 2°. Daß die Circkel/die mit gleicher Oeffnung beschrieben werden / auch gleich seynd.

148 II. Eine gerade Linie zu finden / deren alle die Puncte gleich entfernet seynd von zweyen gegeben Puncten A. und B. fig. 27.

Aus diesen zwey Puncten A. und B. als Centrum, und mit einer einigen Oeffnung nach Belieben genommen / machet vier Bogen/die einander zwey und zwey durchschneiden / in C. und D. und ziehet die Linie CD. diese ist es die man begehret. Dann durch die Bewerckstellung sind C. und D. gleich entfernet von A. und B. darum werden auch alle die andere Puncten dieser Linie CD. gleich entfernet bleiben von A. und B. durch n. 124

149 Es ist auch natürlich klar / daß wann der Punct C. fig. 28. gleich entfernet ist von A. und von B. und man aus diesem Punct C. der Linie CD. und mit der Oeffnung AC. einen Circkel beschreibet / so wird dieser Circkel auch durch B. fahren / und daß die Linie CD. in sich begreiffet alle die Mittel-Puncte von allen den Circkeln / die durch A. und B. fahren werden / weil sie durch n. 124. in sich

begreiffet

begreiffet alle die gleich entfernete Puncte von A. und B. und daß alle die Centrum derer Circkel / die durch A. und B. fahren können / auch müssen ihre Centrum gleich entfernet haben / von A. und von B.

III. Fig. 29. Eine gerade Linie A B. in zwey gleiche Theile zu theilen. 149

Suchet durch das vorige Werckstück die Linie C D. deren alle Puncte gleich entfernet seynd von A. und B. der Durchschnitz-Punct M wird die Mitte seyn / durch n. 124.

Fig. 30. Eben das muß man thun / um einen Bogen A B. in zwey gleiche Theile zu theilen. 150

IV. Fig. 31. Die Circumferentz eines Circkels durch drey gegebene Puncte A. B. C. fahren zu lassen? 151

Fig. 31. Machet die gerade Linie E F. deren alle Puncte gleich entfernet seyen von A. und B. durch n. 147. Machet hernach auch auf eben die Weise / die gerade Linie G H. deren alle Puncte gleich entfernet seyen von B. und C. der Durchschnitz-Punct K. wird das gesuchte Centrum seyn / durch die Bewerckstellung.

Notiret aber / daß wann die drey Puncte in einer geraden Linie wären / die Auffgabe unmüglich wäre / weil eine gerade Linie eine Circular-Linie nicht in drey Puncte durchschneiden kan / durch n. 140.

V. Wie man das Centrum eines Circkels oder auch nur eines Bogens finden kan / wañ es verlohrē wäre? 152

Fig. 31. Nehmet auf die Circumferentz oder auf dem Bogen drey Puncte/ als A. B. C. und thut wie im vorigen Werckstück und in voriger Figur.

Caput III.

Von den Winckeln.

Benennungen.

I.

153 DJe Oeffnung zwoer Linien die sich in einem Punct begegnen / wird Winckel genennet. fig. 32.

54 II. Der Punct B. wo sie einander begegnen/heisset die Spitze des Winckels. fig. 32.

155 III. Die zwo Linien A B. B C. die Seiten oder die Schenckel des Winckels fig. 32.

156 Ein Winckel wird mit dreyen Buchstaben benennet/ deren die Mittelste die Spitze anzeiget / als hier der Winckel A B C. oder C B A. fig. 32.

Eigenschafften der Gerad-Linischen Winckel.

I.

157 DAs Maaß eines Winckels ist der Bogen eines Circkels / dessen Centrum auf die Spitze des Winckels ist / und der Bogen zwischen die Beine desselben; Also ist das Maaß des Winckels A B C. fig. 33. der Bogen A C. dessen Centrum ist in B. und wenn

wenn also dieser Bogen wäre von 60. Gradus, so wird man sagen / der Winckel ABC. seye von 60. Grad.

Hieraus folget 1. Fig. 34. Daß je mehr man den Winckel öffnet / je grösser wird der Bogen / und daß wann dieser Bogen AC. gleich einer halben Circumferentz/die zwo Linien AB. BC. nicht mehr einen Winckel/sondern eine einige gerade Linie machen. 2. Daß wann man den Bogen AC. grösser machet/ als die halbe Circumferentz / der Winckel puckelicht wird/und gegen über einen hohlen Winckel machet / den man gemeiniglich betrachtet. 3. fig. 36. Es gilt gleich/mit welcher Oeffnung man den Bogen AC. macht / w lcher den Winckel messet / dann seine Schenckel werden eben so viel Gradus eines grossen Circkels AC. als eines kleinen ac. abschneiden/durch n. 143. darum kommet die Grösse eines Winckels nicht von der Länge seiner Schenckel/sondern von der Oeffnung die darzwischen ist / also daß man diese Schenckel länger oder kürtzer machen kan/ ohne Veränderung des Winckels. 158

II. Fig. 37. Zwey Winckel ABC. DEF. seynd gleich/ wann sie gleiche Bogen eines einigen Circkels für ihre Maaß haben / oder auch zweyer gleichen Circkel / oder endlich/ wann sie Bogen gleicher Zahl Gradus für ihre Maaß haben in ungleichen Circkeln. 159

Es seynd dreyerley Sorten Winckel/nehmlich gerade/spitzige/ oder scharffe/und stumpffe. 160

 Der

161 Fig. 38. Der gerade Winckel A hat für seine Maaß das Viertel der Circumferentz/ oder 90. Grad, also daß zwey gerade die halbe Circumferentz für ihre Maaß haben/ nehmlich 180. Grad, und vier Gerade den gantzen Circkel/ oder 360. Grad.

162 Fig. 39. Alle Winckel / als B. die kleiner seynd als ein gerader / heissen spitzig / oder scharff.

163 Fig. 40. Alle Winckel / als C. die grösser seynd als ein gerader/ heissen stumpff.

Fig. 41. Wann der Winckel BCD. neben
164 dem Winckel DCA. gesetzt / einen geraden Winckel ausmachet/ so heisset der eine das Complementum des andern.

165 Fig. 42. Und wann der Winckel ECD. neben dem Winckel DCA. gesetzt / zwey gerade Winckels ausmachet/ so heist einer das Complement im halben Circkel / oder schlechthin und kürtzer / das Supplementum des andern.

166 Fig. 43. Es ist klar/ daß wañ zwey Winckels ACD. FGH. einander gleich seynd/ so seynd ihre Complement, als DCB. HGK. auch einander gleich / wie auch ihre Supplement DCE. und HGL.

167 IV. Fig. 44 Wann man aus einem Punct C. einer geraden Linie AB. gegen einerley Seite viele andere Linien ziehet / als CD. CE. CF, alle die Winckel/ die sie da formiren/ wañ sie zusamen genomen werden/ thun so viel / als zwey gerade Winckel/ weil sie die

halbe

halbe Circumferentz für ihre Maaß haben.

Fig. 45. Wann zwo oder mehr Linien/als 168
AC. DC FC. GC. einander begegnen in einem einigen Punct C. alle die Winckel/ die sich um diesen Punct formiren werden/ werden vier geraden Winckeln gleich seyn/ weil sie eine gantze Circumferentz für ihr Maaß haben werden.

V. Fig 46 Wann zwo gerade Linien/als 169
AB. DE. einander im Punct C. durchschneiden/ so werden sie zwey einander gegenüberstehende Winckels formirẽ/ als ACE. DCB. die einander gleich seyn werden/ durch n. 165. Dann ein jeder ist das Supplement eines einigen Winckels ACD.

Problemata oder Werckstücke.

I.

Auf einer Linie AB. fig. 47 in einem ge- 170
gebenen Punct A. einen Winckel formiren/ der gleich sey einem gegebenen Winckel E.

Aus der Spitze E des gegebenen Winckels/ beschreibet den Bogen FG nach Belieben; und aus dem Punct A. der gegebenen Linie mit voriger Oeffnung des Circkels/ beschreibet den Bogen BC. auf welchem nehmet BC. gleich FG. und ziehet die Linie AC. der Winckel A. wird gleich seyn dem Winckel E. durch n 138. Dann sie für ihre Maaß haben werden gleiche Bogen von gleichen Circkeln BC, FG,

171 II. Fig. 48. Einen gegebenen Winckel A. in zwey gleiche Theile zu theilen?

Aus dem Punct A. beschreibet nach Belieben den Bogen B C. und aus den Puncten B. und C. als Centrum beschreibet/ auch mit einer beliebigen Oeffnung/ den Creutzschnit D. ziehet die Linie A D. die wird den Winckel A. in zwey gleiche Theile theilen / durch n. 150.

Caput IV.

Von der Bley-Rechten oder Perpendicular-Linie.

Benennungen.

I.

172 EIne Linie C A fig. 49. ist einer andern perpendicular, wann sie selbige anstosset/ also daß sie die Winckels auff beyden Seiten A C D. A C B. einander gleich machet / welche rechte oder gerade Winckel seyn werden.

173 II. Fig. 50. Eine Linie / als F K. ist schief oder obliqua auf einer andern H G, wann sie ungleiche Winckel mit dieser machet / als F K H. F K G. welche beyde aber zusammen genommen/ allezeit zweyen rechten Winckeln gleich seynd/ weil sie den halben Umkreiß des Circkels für ihre Maaß haben.

Eigen-

Eigenschafften.

I.

Eine Linie ACE. fig. 51. die perpendicular auf BD. ist/ machet mit derselben auf einerley Seite die zwey gerade Winckels BCA. ACD und wañ sie selbige durchschneidet/ so machet sie mit derselben 4. gerade Winckels. Es ist die umgekehrte des n. 172. 174

Fig. 52. Eine Obliqua, als FK. auf HG. machet mit derselben auf einerley Seite zwey Neben-Winckels HKF. FKG den einen stumpff/ den andern scharff/ welche zusammen genommen zweyen geraden gleich seynd/ und wann sie durchschneidet/ so machet sie 4 Winckels/ zwey stumpffe und zwey scharffe/ die miteinander 4. geraden Winckeln gleich seynd. Es ist die umgekehrte des n. 173.

Hieraus folget/ daß/ wann zwo Linien miteinander einen geraden Winckel machen/ so seynd sie einander perpendicular, und wann sie miteinander einen spitzigen oder stumpffen Winckel machen/ so seynd sie schieff oder obliquæ. 175

II. Fig. 53. Wann ein Punct C. einer perpendicular gleich entfernet ist von zweyen Puncten B. und D. der Linie/ worauff sie Bleyrecht ist/ so seynd alle die andere Puncte der Perpendicular AC. gleich entfernet von diesen zweyen B. und D. 176

Dann/ man setze nur/ daß diese Fläche gefalten

gefalten oder gebrochen wäre in der Länge der ⊥ AC. das Theil/ CD. wird fallen justement auf CB. und der Puuct D. auff B. und alsdann wird die Distantz oder Entfernung eines jeden Puncts der ⊥ AC. gegen die Puncten D. und B. eben dieselbige seyn/ nun aber / wann man diese Fläche wieder aufmachet/so ändern sich diese Distantzē nicht. Ergo, so seynd dann alle die Punct der ⊥ AC. gleicher Distantz von diesen zwey Puncten D. und B.

177 Hieraus folget / daß wann eine Linie zwey ihrer Puncten gleich entfernet hat / von zweyen Puncten einer andern Linie / so seynd diese Linien einander perpendicular.

178 III. Fig. 54. Wañ man von einem Punct C. auf AB. eine ⊥ CG. ziehet und andere obliquæ CE. CF. CG. So ist 1. die ⊥ die kürtzeste unter allen. 2. Die schiefe CG. die am weitesten von der ⊥ ist/ ist die längste/ und 3. die zwo schiefe CE. CF die gleich entfernet von der ⊥ seynd auch einander gleich.

Dann wann man die ⊥ verlängert biß in H. also daß DH. gleich seye CD. und daß man die schiefe HE. HF. HG. ziehe / die da gleich seyn werden denen CE. CF. CG. welches durch die Natur der Figur klar ist/ so ist 1. die gerade CH. kürtzer als die gekrümmete CEH. Ergo CD. die Helffte CH. ist auch kürtzer als CE. die Helffte der gekrümten CEH. 2. Die gekrümte CGH. ist länger als CFH. die sie einschliesset. Ergo ihre

ihre Helffte C G. ist auch durch n. 66. länger als die Helffte CF. 3. Weil der Punct D. der ⊥ gleich entfernet ist von E. und von F. so ist der Punct C. auch von ihnen gleich entfernet durch n. 176. und darum seynd auch die schieffe C E. C F. einander gleich.

Hieraus folget fig 55. u. 56. 1. Daß von einem Punct D nur eine ⊥ auff eine Linie AB kan gezogen werden/ uñ daß die ⊥ das rechte Maaß ist der Distantz eines Puncts gegen einer Linie. 2. fig 57. Daß man aus einem gegebenen Punct nicht drey gleiche schiefe Linien auf einer Line ziehen kan/ sondern nur immer zwo und zwo gleiche CE, CF. / und darum auch/ daß eine gerade Linie nur immer zwey und zwey Puncte gleich entfernet von einem dritten Punct haben kan/ und niemahls drey. 179

IV. Fig 58. Wann man von einem Punct C. ausser einer Linie A B. auf selbige zwo andere Linien ziehet CF. CG. so ist der auswendige Winckel CFA grösser als der inwendige CGA. Dann wann man sich einbildet/ daß sich der Winckel AGC beweget nach der Länge der Linie GA, also daß seine Spitze G. sich in F. befinde/ alsdann wird sich die Seite G C. in F L. befinden/ aber D. ax. 1. der Winckel CFA. ist grösser als der Winckel LFA. Ergo, so ist er dann auch grösser als CGA. der ihm gleich ist/ wie natürlich klar. 180

Hieraus folget 1. Fig. 59. Daß wann man aus einem Punct C. auf einer Linie AB. 181

eine ⊥ und andere Schiefe als CE.CF.CG ziehet / so wird sich die ⊥ auf die Seite des spitzigen Winckels finden/dieweil der Winckel CDA. gerad ist/so ist sein inwendiger CFA. kleiner als ein gerader.

2. Die Schiefe CG. die am weitesten von der ⊥ ist / ist auch die schiefeste / das ist/ daß sie den spitzigsten Winckel CGA. machet.

3. Endlich/ die obliquæ CE.CG.die gleich entfernet von der ⊥ / seynd schieff auch gleich / das ist / sie machen mit der Linie AB. gleiche Winckels.

182 Fig 59. Darum kan man auch nicht mehr als eine ⊥ von einem Punct als C. auf eine gegebene Linie AB. ziehen und auch nicht mehr als zwo gleiche Schieffe/ und niemahls drey.

183. V.Fig.59 u.60. Was wir gesagt haben von den Schieffen Linien die aus einem punct C. einer ⊥ CD. gezogen werden / muß auch verstanden werden von den schiefen Linien die aus einem punct c. einer andern ⊥ cd gezogẽ werdẽ/die gleich ist mit CD. und folget zugleich aus vorigẽ allem/daß wañ drey Linien aneinander hangen/u. drey andere auch ebenfals aneinander/ also daß unter jeden dreyen die eine ⊥ seye auf eine andere/ so können zwo unter den drey ersten nicht gleich seyn/ zwoen gleiches Nahmens unter den dreyen andern / daß nicht auch die dritte gleich seye der dritten; das ist/ wann die Schieffe einer

Seite

Seitē gleich ist der Schiefen auf der andern/ u. die perpendicular gleich der andern perpendicular so ist auch die Entfernung der ⊥ einerseits / gleich der Entfernung der ⊥ auf der andern Seite / und so im̃er/ man mag sie zwo und zwo nehmen / wie man will.

Hieraus folget / daß die wahre Zeichen / wodurch man wissen kan ob die Linie CD. ⊥ ist auf AB. diese seynd. 184

1. Wann diese Linie auf beyden Seiten einen geraden Winckel machet.

2. Wann zwey punct der einen als centra gebraucht / zwey Circkel können gemacht werden / die durch zwey gewisse puncte der andern fahren.

3. Wann die Linie CD. die kürtzeste ist von allen denen die von C. auf AB. können gezogen werden.

Problema oder Auffgabe.

AUs einem gegebenen punct D. sol man auf die Linie AB. eine ⊥ ziehen? fig. 61. 185

Aus D. als Centrum machet einen Bogen / der die gegebene Linie in zwey puncten als in A. und B. durchschneide / aus diesen zwey puncten als Centrum, und einer beliebigen Oeffnung des Circkels machet einen Creutzschnitt in C. ziehet die Linie DC. die wird die gesuchte ⊥ seyn.

Dann durch die Bewerckstellung hat die Linie CD. ihre zwey puncte C. und D. gleich entfernet von den zweyen A. und B. der Linie AB. Ergo D. n. 184. &c.

Caput V.

Von denen Parallel Linien.

Benennungen.

I.

186 EIne Linie CD. fig 62. ist einer andern AB. parallel oder ebenweitig / wann alle die puncten der einen gleich entfernet seynd von der andern / das ist / wann alle die ⊥ als CA. BD. von der einen auff die andere / einander gleich seynd.

187 II. Der Raum der zwischen zwo Parallel Linien begriffen ist / wird Parallel-Raum genennet.

Eigenschafften.

I.

188 Zwo gerade parallel Linien AB CD. fig. 63. wann sie gleich unendlich weit fortgezogen werden / werden nimmermehr einander anstossen; aber zwo gerade und nicht parallel-Linien / EF. AB. wann sie verlängert werden / stossen endlich einander an in G. auf der Seite / wo sie sich nähern. d. i. klar.

189 II. fig. 64 Wann eine Linie als EF. ⊥ ist auff eine von denen als AB. so ist sie auch ⊥ auf die andere CD.

Dann wann man sich einbildet / daß das Papier oder andere Fläche gefalten oder gebrochen seye in der Länge der ⊥ EF. weil die Winckel in E einander gleich seynd / so

wird sich das Theil EA. d. ax. VII. auf dem Theil EB. schicken; eben desgleichen durch die Natur der = weil das Theil FC. so weit entfernet ist von EA. als FD. von EB. so wird sich auch das Theil FC. schicken auff FD. und also d. ax. VI. seynd dann auch in F. die Winckel einander gleich/und folglich ist EF. $\perp$ auf CD. d. n. 184.

Fig. 65. Wann aber zwo Linien AB CD. 190
einander nicht parallel seynd / die $\perp$ auf die eine als auff AB. wird schief oder obliqua seyn auf die andere CD.

III. fig. 66. Wann man eine $\perp$ EF. und 191
viele Schiefe GH. IK. LM. zwischen zwo parallelen AB. CD. ziehet / so wird 1. Die $\perp$ EF. die Kürtzeste seyn. 2. Die schieffeste LM. ist die längste. 3. Die Gleichschiefe GH. IK. seynd einander gleich.

1. Die $\perp$ FE ist kürtzer als die Schiefe GH. Dann wann man die $\perp$ GP. ziehet/ die ist gleich mit EF. d. n. 186. und kürtzer als ihre Schiefe GH. d. n. 178. Ergo ist klar daß die $\perp$ EF. kürtzer ist als die Schiefe GH.

2. Die schiefeste LM. ist länger als IK. die nicht so schief ist. Dann wann man die $\perp$ IR und LS machet/ so werden sie gleich seyn/ wie indem gemeldet/ und die schiefeste LM. ist länger als IK. die nicht so schief ist durch n. 178.

3. Aus eben der Ursach/ die gleich Schiefe GH. IK. seynd auch einander gleich/ auch durch n. 178.

192 Durch die inversa oder umgekehrte dieses vorigē Vortrags wird man auch beweisē/daß die kürtzeste Linie die man zwischen zwo = ziehen kan/ die ⊥ sey/ und daß die längste seye die schiefeste. Und daß die gleicher Länge seynd/ auch gleich schief sind. das ist/ daß sie gleiche Winckels machen.

193 Fig. 67. Hieraus folget 1 daß die ⊥ EF. das rechte Maaß ist der distantz oder entfernung der Parallel-Linien/oder das Maaß der Breite eines parallel Raums.

194 2. Was wir gesagt haben; von denen Linien die in einem = Raum gezogen werden/muß auch verstanden werden von denen Linien/die in unterschiedene = Raum fig. 68. gezogen werden/ aber die gleicher Breite seynd; Das ist/ daß in solchen = Raumen die ⊥ und die Gleichschiefē einander gleich seynd ꝛc.

195. 3 Zwey = Raum seynd gleich/wann die ⊥ oder die Gleichschiefe die darzwischen gezogen werden/einander gleich seynd.

196. Fig. 69. Wann zwo Linien als AB. CD. einander nicht parallel seynd/ so kan man zwischen dieselbe zwo gleiche ⊥ ziehen/ die eine auf AB. die andere auf CD. aber solche ⊥ werden einander durchschneiden Es wird eben so gehen mit den Gleichschiefen/ und gleichlangen/ die auch zwischen solchen Linien einander durchschneiden können/wie leichtlich zu mercken ist

197 IV. Fig. 70. Wann eine Linie EF. zwo = durch-

durchschneidet als AB. und CD, und daß man die Winckel vergleichet/die auf der einē parallel geschehen / mit denen die auf der anderen Parallel kommen / so gibt man ihnen unterschiedene Nahmen.

Die vier Winckels die aus dem parallel Raum seynd / werden auswendige Winckels genennt/ und die vier in dem Raums werden inwendige Winckels genannt; Die inwendige von unterschiedenen Seiten der schneidenden Linie / einer oben / der ander unten / als die Winckel CEF, BFE, werden umwechselende Winckel genañt; Fig. 71. 198

Das nun also voraus gesetzt / so wird bewiesen / 1. daß die umwechselende Winckels einander gleich seynd. 2. Ein auswendiger Winckel ist seinem gegenüberstehenden inwendigen auf gleicher Seiten gleich. 3 Zwey inwendige auff einer Seitē/seynd zweyen geraden Winckeln gleich.

1. Fig. 71. Die umwechselende B F E. CEF seynd einander gleich. Dañ 1. wañ die Linie EF. ⊥ ist/so sind die umwechselende Winckels alle beyde gerade/und darū auch gleich. 2. Wann EF. schief ist / und daß die Umwechselende Winckels spitzig seynd/ziehet die zwo ⊥ EG. FH. die werden einander gleich seyn / durch n. 186 und die Schiefe EF. wird gleich seyn für alle beyde / und darum auch gleich schief in ansehen dieser zwoen. ⊥ Ergo die umwechselende BFE CEF. seynd gleich/ durch n. 192. 3. Wann die umwech- 199.

selende

felende stumpf seynd/ so seynd sie die Supplement der spitzigen die da gleich seynd wie wir indem bewiesen haben/ und darum auch einander gleich durch n. 166.

200 2 Fig. 72. Der auswendige < GED ist gleich seinem gegenüberstehenden EFB Dañ der < GED ist gleich dem < CEF. der ihm an der Spitze gegenüber stehet/ durch n. 169. und CEF ist seinem umwechselenden EFB. gleich/ durch n. 199. Ergo der auswendige GED wird auch dem inwendigen gegenüberstehenden EFB. gleich seyn/ wie es natürlich klar.

201 3. Die inwendige auff einer Seiten DEF. EFB. seynd zweyen geraden gleich. Dann der < EFB ist seinem umwechselenden CEF. gleich/ d. n. 199. welcher mit seinem Nebenwinckel DEF. zweyen geraden gleich seynd. Durch n. 167 Ergo die zwey inwendige DEF. EFB seynd zweyen geraden Winckeln gleich.

202 Hieraus folget/ daß wann eine Linie zwo ═ durchschneidet/ so ist sie auff alle beyde gleich schief; weil die spitzige Winckels die sie auf die eine machet/ gleich seynd den spitzigen die sie auf die andere machet/ und darum auch die stumpffen/ die derselben Supplementa seynd/ seynd auch einander gleich; und also seynd diese zwo ═ auf diese schneidende gleich schief.

203 V. Fig 73. Wann zwo Parallel Linien AB. CD zwo andere Parallel-Linien AC BD. durchschneiden. 1. Die gegenüberstehende Win-

Winckel A. und D. seynd einander gleich / weil sie die Supplement des Winckels B. oder C. mit welchen sie jedweder / zweyen geraden gleich seynd. Das ist / weil der <D mit dem < B. zwey gerade Winckels machen d.n.201 und die <A+B machen auch zwey rechte Winckel durch n. 201. Darum ist der <A ∝ dem <D. durch ax. VI.

2. Die gegenüberstehende Linien CA. DB. seynd auch einander gleich / indem sie ═══ seynd/u. darum auch gleichschief in dẽ parallel-Raum CD.AB Ergo seynd sie gleich d.n.192.

VI. Fig.74. Wann unter zwo Linien CA. DB. die zwischen zwo ═══ AB.CD. begriffen seynd/die eine AC. durch andere in gleiche Theile geschnitten ist / die mit den ersten ═══ sind / so ist die andere DB. dadurch auch in gleiche Theile getheilet; dann weil die Theile von AC. einander gleich seynd/ und auch gleich schief in den kleinen Parallel-Raumen/so seynd diese Parallel-Raum auch einander gleich/ d.n. 195. in welchen weil die Theile der Linie DB. gleich schief seynd / so seynd sie auch einander gleich d.n. 194. 204

Hieraus folget/ daß die Zeichen wodurch man erkennen kan ob eine gerade Linie einer andern ═══ ist / seynd. 205

1. Wann zwo gerade Linien unendlich solten verlängert werden / und daß sie doch nimmermehr einander anstossen würden/so seynd sie ═══.

2. Wañ eine einige Linie auf zwo andere $\perp$ ist / so seynd diese zwo andere einander $=$.

3. Wann eine einige Linie auf zwo andere gleich schief ist / also daß die umwechselende Winckel / oder der auswendige mit dem gegenüberstehenden inwendigen auf einer Seiten einander gleich seynd / so seynd diese Linie $=$.

4. Wann zwey inwendige $<$ auf einer einigen Seite zweyen geraden $<$ gleich seynd / so seynd sie $=$.

5. Wann zwo $\perp$ zwischen zwo Linien einander gleich seynd / so seynd die zwo Linien $=$.

6. Wann zwo Linien / zwischen zwo andere begriffen / gleich und gleich schief seynd.

7. Wann zwo Linien gleich und $=$ seynd / und wird an ihren Enden der parallel-Raum geschlossen / mit zwo andere / diese zwo letzte / werden auch gleich und $=$ seyn.

Problemata oder Auffgaben.

I.

206 Durch einen gegebenen Punct C. fig. 75. einer gegebenen Linien AB. eine $=$ ziehen?

Aus C. als centrum, mit beliebiger Oeffnung / machet einen Bogen BD. der die Linie schneide in einem Punct als B. aus diesem punct B. mit gleicher Oeffnung / machet den Bogen CA. darnach machet den Bo-

gen BD. gleich CA. und ziehet die Linie CD. die wird mit AB. = seyn.

Dann/ziehet CB. die zwey <DCB, CBA. seynd gleich durch n. 159. Weil sie durch gleiche Bogen gemessen werden/und seynd auch umwechselend Ergo &c. D. n. 205.

II. Fig. 76. Eine gegebene Linie als AB. 207
in einer gewissen Zahl gleicher Theile/oder sonsten in solche Theile/ die eine gewisse Verhaltnüß mit der gegebenen AB. haben/ zu theilen/ als zum Exempel in 5. gleiche Theile.

Aus A. ziehet die ungeendete AC. auf welcher ihr die beliebige öffnung A 1. fünff mahl nacheinander setzet; Von dem punct 5. ziehet die Linie 5B. und mit dieser D. n. 206. lauter = auf die andere puncte 4. 3. 2. 1. welche die Linie AB. nach Begehren theilen wird. durch n. 191.

Caput VI.

Von denen Linien die in und aus dem Circkel gezogen werden.

I. Von den Chordis.

I.

MAnn ein Diameter als EF. fig. 77. eine Chorda in der Mitte durchschneidet in D. so wird er auch den 208

grossen Bogen in E, und den kleinen in F. in der Mitten schneiden / und wird auf die Chorda $\perp$ seyn.

Dann der Diameter hat das Centrum C und den punct D. von den zweyen puncten A. und B. gleich entfernet / Ergo d. n. 124. seine puncten E. und F. werden auch darvon gleich entfernet seyn / und darum seynd dann der grosse und der kleine Bogen in der Mitte getheilet / und wird also auch $\perp$ auf die Chorda seyn. d. n. 177.

209 Ebenfals wird man auch beweisen / daß wann der Diameter den kleinen oder den grossen Bogen in zwey gleiche Theile theilet / so wird er die Chorda AB. in der Mitte und perpendiculariter schneiden; Und endlich / daß wann die Linie EF. die Chorda AB. und einen von beyden Bogen in zwey gleiche Theile theilet / so wird sie durch das Centrum fahren / allezeit d. n. 123. und 177.

210 II. Fig. 78. Wann die zwo Chorda AB. EF. in einem Circkel oder in 2. gleichen Circkeln einander gleich seynd / so seynd sie auch von dem Centro gleich entfernet.

Dann wann man von dem Centro die Radius CA. CE. ziehet / und die Linien CD. CH. die die Chorden in zwey gleiche Theile theilen / die Hälfften AD. EH. seynd einander gleich und $\perp$ auf CD. CH. d. n. 209. die Schiefe AC. EC seynd auch einander gleich / darum seynd die Entfernungẽ CD CH. auch einander gleich. d. n. 183.

III. Wann man in einem Circkel zwey ungleiche Bogen nimmt / einen jeden kleiner als die halbe Circumferentz. 1. wird der kleineste Bogen die kürtzeste Chorda haben. 2. Und die kleineste Chorda wird am weitesten von dem Diametro stehen. 211

Fig. 79. Dann wann man ziehet auf AB. die ⊥ CD. und auf AE. die ⊥ CH. welche AB. in G. schneiden wird.

1. Die ⊥ CD. CH. werden ihre Chorda in gleiche Theile theilen / d. n. 209. Ferner / weil AH. ⊥ ist auf HG. so wird sie kürtzer seyn als die Schiefe AG. d. n. 178. Und AG ist kürtzer als AD. Ergo so ist auch AH. kürtzer als AD. und folglich die gantze AE. kürtzer als die gantze AB.

2. Die Entfernung CH. der kleinen Chorda vom Centro ist länger als die Entfernung CD. der langen Chorda. Dann CH. ist länger als CG. und CG. weil sie schief ist / ist noch länger als die ⊥ CD. d. n. 178. Ergo die Entfernung CH. der kleinen Chorda vom Centro ist länger als die Entfernung CD. der grossen Chorda.

II. Von denen Tangentibus.

IV. Fig. 80. Wann man auf dem Ende A. eines Radius CA. die ⊥ AB. machet / dieselbige wird Tangens oder eine anrührende Linie des Circkels heissen / das ist / sie wird neben dem Circkel vorbey fahren und anrühren in A. aber denselben nicht schneiden / 212

und also werden alle andere Puncten dieser Linie als D. aus dem Circkel seyn

Dann wann man CD. ziehet/ so wird sie auf AB. schief seyn. Ergo so wird sie auch länger seyn als der Radius CA. welcher ⊥ ist D n. 178. Darum ist dann D. aus dem Circkel.

213 V. Fig. 80. Wann eine Linie AB. den Circkel anrühret in einem Punct als A. diese wird ⊥ seyn auf dem Radius CA. Dann wann man aus dem Centro C. andere Linien auf die Tangens ziehet/ als CD. die werden aus demselben Circkel fahren Ergo der Radius wird die allerkürtzeste seyn/ D. n. 212 Ergo so ist er ⊥ D. n. 178.

214 VI. Fig. 80. Wann eine Linie als AB. den Circkel anrühret als in A und daß man auf dieselbe in A. eine ⊥ machet / die wird durch das Centrum fahren.

Dann wann man von A. im Centro eine Linie AC. ziehet / die wird auf AB. ⊥ seyn wie zuvor gesehen / nun aber aus einem einigen Punct A. kan man nicht mehr als eine ⊥ ziehen / D. n. 179. Ergo &c.

III. Von denen Parallelen in dem Circkel.

VII.

215 MAñ zwo = Linien AB, CD, fig 81 die Circumferentz eines Circkels schneiden/ so werden sie auf beyden Seiten gleiche

gleiche Bogen AC, BD. darvon abschneiden. Dann wann man den Diameter EF. ⊥ darüber ziehet / so wird er die Bogen AEB. CFD. in der Mitten theilen. Darum dann / wann man von denen zwey gleichen Bogen EC. ED. die zwey gleiche Theile AE. EB. abziehet / so bleiben die Rest AC. BD. auch gleich d. n. 57.

VIII. Fig. 82. Eben desgleichen / wann unter zwo parallelen AB. CD. die eine AB. 216
den Circkel in E. anrühret / und die andere ihn schneidet / so werden sie auch gleiche Bogen auf beyden Seiten abschneiden / als EC. ED. Dann wann man einen Diameter EF. durch den anrührenden Punct E. ziehet / der wird auf CD. ⊥ seyn / d. n. 213. und darum auch wird er den Bogen CDE. in zwey gleiche Theil theilen im Punct E.

Fig. 83. Endlich wann die zwo parallel-Linien den Circkel nur anrühren in E und F. so 217
werden sie noch gleiche Bogen auf beyden Seiten haben / welche alsdann halbe Circkel seyn werden. d. n. 140.

Von denen Winckeln in der Circumferentz / oder in dem Circkel ausser dem Centro, oder aus dem Circkel.

Wir haben in dem Capitel der Win- 218
ckeln gesagt / daß ein Winckel A. Fig. 84. der seine Spitze im Cen-

tro hat/ auch für seine Maaß habe / den Bogen auf welchen er ruhet. Hier aber müssen wir sagen welche Bogen das Maaß seyn werden / von allen andern Winckeln / deren die Schenckel den Circkel schneiden oder anrühren.

219 IX. Fig. 85. Wann ein Winckel als BAD. seine Spitze in dem Umkreiß hat/ so ist sein Maaß die Hälffte des Bogens BD auf welchem er ruhet. Dañ entweder wird es alsdañ geschehen / daß eine seiner Seiten durch das Centrum gehet / oder daß das Centrum zwischen die beyde Seiten ist / oder endlich daß das Centrum ausser dem Winckel ist

1. Fig. 86. Wann eine Seite als AB. durch das Centrum gehet so ziehet durch das Centrum C. die Linie EF. = mit der anderen Seite AD. Nun aber / wegen der = ist der Winckel A. gleich seinem auswendigen FCB. d. n. 200. und darum hat er auch mit ihm einerley Maaß / nehmlich den Bogen BF. Aber BF. d. n. 145. ist die Hälffte von BD. Dann er ist gleich seinem gegenüberstehenden AE. der da gleich ist mit FD. d. n. 215. Weil diese beyde zwischen zwo = begriffen seynd; Ergo so hat dann der <A. den halben Bogen BD. worauff er ruhet / für sein Maaß.

2. Fig. 87. Wann das Centrum C. zwischen die zwo Beine des Winckels A. stehet/ ziehet AF. durch das Centrum/ alsdann ist der Winckel A. in zwey andere getheilet / deren

deren

denen die Seite AF. gemein ist / deren ein jeder durch vorigen Casum für sein Maaß hat die Hälffte des Bogens worauf er ruhet / und darum auch wird der gantze Winckel A. die Hälffte des gantzen Bogens BD. für sein Maaß haben.

3. Fig 88. Wann das Centrum C. ausser dem Winckel stehet / ziehet die Linie AF. durch das Centrum. Der gantze <FAD. hat für sein Maaß den halben Bogen FD. durch den ersten Casum, und das Theil BAF. hat für sein Maaß den halben Bogen BF. und darum so muß dann das Theil BAD. auch für sein Maaß haben den halben Bogen BD worauff er ruhet.

4. Fig 89. Wann der Winckel A. durch eine Chorda AD. und eine Tangens AB. formiret ist / so hat er für sein Maaß die Hälffte des Bogens AD. den diese Chorda unterspannet. 220

Dann ziehet DE. ═ mit AB der Winckel A. ist gleich seinem umwechselenden D. d. n. 199. der für sein Maaß hat durch den vorigen Beweiß die Hälffte des Bogens AE. oder AD. der ihm gleich ist / d. n. 215. Ergo so hat der < A. auch für sein Maaß die Hälffte des unterspannten Bogens AD.

5. Fig. 90. Wann ein < A. die Beine aus dem Circkel hat / und die Spitze in der Circumferentz / als BAC. So siehet man durch das vorhergehende / (weil d. n. 169. der 221

<BAC.)o dem < DAE) daß BAC für sein Maaß hat die Hälffte des hohlen Bogens DE, welcher in dem Circkel geschnitten wird durch die fortgezogene Seiten CA. BA.

222 Aus dem allen folget 1. Daß wann viele Winckels BCD. fig. 91. auf einem Bogen BD ruhen/ so seynd sie alle untereinander gleich / weil ein jeder d. 219. die Hälffte des Bogens BD. für sein Maaß hat. 2. fig 92

223 Daß wann der Winckel A. seine Spitze in der Circumferentz hat/ und ruhet auf einem halben Circkel / so ist er gerade / eben d. n.

224 219. Daß wann der Bogen BAD. fig. 93. worauf er ruhet / grösser ist als die halbe Circumferentz / so ist er stumpff/ uñ daß /wañ

225 der Bogen BD. Fig. 94. kleiner ist als die halbe Circumferentz/ so ist er spitzig. 3. Fig. 95 Daß

226 wann man drey Linien in dem Circkel ziehet/ die einen Triangel formiren/ als ABC. ein jeder von diesen Winckeln hat für sein Maaß die Hälffte des Bogens/ worauf er ruhet; A. hat die Hälffte BC. B die Hälffte AC. und C. die Hälffte AB. und also die drey zusammen/ haben für ihr Maaß die Hälffte des gantzen Umkreises/ das ist/ 180. Gradus, oder so viel als zwey gerade.

227 X. Fig. 96. Wann ein Winckel durch zwo Tangens gemacht wird BAC / so hat er für sein Maaß die Hälffte des hohlen Bogens BDC. worauf er ruhe weniger die Hälffte des Buckelichten Bogens BEC. Dann ziehet die Chorda BC, und den Diameter

ameter CF. der △ AGC. ist rechtwinckelicht in G. darum folget aus n 226. daß der < GAC. mit dem < GCA. einem rechten Winckel gleich seynd/ aber d. n. 213. der < ACF. ist auch ein rechter Winckel/ daraus folget d. ax. IV. daß der < BCF. ∞ < GAC; Ergo, weil der < GAC. die Hälffte ist von BAC. und d. n. 219 der < BCF. die Hälffte von BHF. so ist der < BAC ∞ < BHF. Nun aber der Bogen BF. welcher daß Maaß derselben ist/ ist BD. die Hälffte des Bogens BDC weniger DF. die Hälffte des Bogens BEC. Dann d. n 169. der Bogen DF. ∞ dem Bogen EC. W. Z. B. W.

XI. Fig. 97. Wann alle beyde Beine CA 228
CE. die Circumferenz schneiden/ und der < aus dem Circkel ist als ACE. so ist/ wie zuvor/ das Maaß des < die Hälffte des hohlen Bogens AE. weniger die Hälffte des Buckelichten BD. Dann ziehet AD. der < ADE. ist gleich den zweyen A. und C. zusammen/ weil diese beyde/ d. n. 226 oder ADE allein d. n. 167. zwey gerade machen/ wann sie mit dem < ADC. addiret werden/ nun aber ist das Maaß des < ADE. die Hälffte des Bogens AE. d n. 219. und das Maaß des < A die Hälffte des Bogens BD. so folget/ daß das Maaß des < C. ist die Hälffte des Bogens AE weniger die Hälffte des Bogens BD. W. Z. B. W.

XII. Fig. 98. Wañ eine Seite A C eines < A anrühret 229
u. die andere AB den Circkel schneidet/

 so

so ist wieder wie zuvor/ das Maaß des < A die Hälffte des hohlen Bogens BEC. weniger die Hälffte des Bucklichten CD. welches leicht eben wie zuvor zu beweisen ist.

230 XIII. Fig. 99. Endlich / das Maaß des < AED. der in dem Circkel gemacht ist ausser dem Centro, ist die Hälffte des Bogens AD. worauff er ruhet mit der Hälffte des Bogens BC. der gegenüberstehet. Dann ziehet die Linie CD. der < AED. ist gleich den zweyen ACD. und CDB. zusammen/ wie n. 228 erwehnet/ nun aber d. n. 219 der < ACD hat für sein Maaß die Hälffte des Bogens AD. und der < CDB. hat für sein Maaß die Hälffte des Bogens BC. so hat dann auch der < AED für sein Maaß die Hälffte des Bogens AD. mit der Hälffte des Bogens BC. Welches zu beweisen war.

Problemata oder Auffgaben.

I.

231 AN einem in der Circumferentz gegebenen Punct als A. Fig. 100. eine Tangens zu ziehen.

Aus dem Punct A. ziehet den Radius AC. auf dem in A. machet die ⊥ AB. welche die begehrete Tangens seyn wird. n. 212.

232 II. Fig. 101 Aus einem ausser den Circkel gegebenen Punct A. eine Tangens zu ziehen.

Fig.

Fig. 101. Von dem Punct A. auf das centrum C. ziehet AC. und theilet sie in der Mitten in O. aus O. als centrum mit dem Radio OC. machet einen Circkel/ der den gegebenen Circkel in zwey Punct B. und D. schneiden wird. Aus dem Punct A. auf einem von diesen beyden B oder D. ziehet AB. die wird die gesuchte Tangens seyn.

Dann wann man den Radius BC. ziehet/ der Winckel ABC. ist gerade d. n. 223. weil er seine Spitze in der circumferentz hat/ und daß er auf die halbe circumferentz ADC. ruhet/ und darum ist dann auch AB ⊥ auff den Radius BC. und also Tangens d. n. 212.

Caput VII.

Von denen Proportional-Linien.

Was wir im ersten Buch von den Ebenmäßigen Grössen insgemein gesagt haben/ muß auch ins besondere den Linien zugeschrieben werden. Also werden wir sagen/ daß die vier Linien A. B. C. D. Fig. 102. ebenmäßig seynd/ wann die Verhaltnüß von A. gegen B. eben diese welche von C gegen D. ist das ist; wann die Ersten Sätze A. und C. gleicher Weise ihre andere Sätze B. und D. in sich begreiffen/ oder nur derselben gleichmässende aufgehende Theile. 233

234 Fig. 103 Wir wollen sagen/ daß zwo Linien A. B. zwoen andern C. D. wiederkehrig proportional seynd / wann die zwo erste A. und B. die äuserste seynd in einer Proportion, und die zwo andere C. und D die mittelste/ oder vice versa C. D. die äuserste/ und A B die mittelste d n. 52.

235 Fig. 104 Man sagt von einer Linie AB sie seye geschnitten in media & extrema ratione, wañ die gantze AB. stehet zu ihrem grösten Theil AC. wie dasselbige Theil AC stehet zu dem kleinen Theil CB.

236 Fig. 105. Der Product zwoer Linien/ ist die Multiplicatio der Zahl der Theile von A. mit der Zahl der Theile von B. wann diese beyde Linien in gleiche Theile getheilet worden seynd/ welche Theile wir als Einheiten nehmen. Also/ wann A. in vier gleiche Theile getheilet ist/ und B in drey/ der product von A. mit B. ist 12. Oder auch dieser product ist eine recht-winckelichte Vierung deren Länge ist eine von den gegebenen Linien / und die Breite ist die andere / wie man im vierdten Buch sehen wird.

237 Wann man den Product zwoer Linien vergleichen oder compariren will / mit dem product zwoer andern/ so muß man voraus setzen oder præsupponiren / daß sie alle vier in untereinander gleiche Theile getheilet worden seynd/ oder zum wenigsten/ daß die zwey ersten Sätze in untereinander gleiche Theile getheilet worden seynd/ und die zwey andere

anderen Sätze auch in untereinander gleiche Theile getheilet seynd.

Eigenschafften.

I.

MAn zwo linien AB. CD Fig 106 in einẽ Parallel-Raum gleichschief seynd zwoen andern Linien EF. GH in einen andern Parallel-Raum/ die zwo ersten seynd den zwoen andern ebenmäßig/ das ist AB. EF :: CD. GH. 238

Dann wann man EF. zertheilet in so viel gleiche Theile als man will/ als in 4. die ich p. nennen will/ und durch jede Theilung ziehet ═ Linien; Alsdann wird GH. in eben so viel gleiche Theile getheilet seyn/ die ich S. nennen will/ also daß EF. wird 4. p. gleich seyn/ und GH. ∞ 4. S. Alsdann traget ein Theil p. des andern Satzes EF. auf seinem ersten Satz AB. das wird gerade etliche mahl ohne Rest drinnen begriffen seyn/ oder etliche mahl mit einem Rest. Gesetzt 1. ohne Rest/ zum Exempel 3. mahl/ ziehet/ auch hier durch eine jede Theilung ═ Linien mit den ersten/ so wird CD. dadurch auch in eben so viel gleiche Theile getheilet werden/ und Theile die d. n. 191. und 194. den Theilen ihres andern Satzes GH gleich seyn werden/ weil sie gleich schieff seynd/ in kleine gleiche Parallel-Raum. Also dann wird man haben AB. gleich 3 p. CD gleich 3. S. aber 3p. 4p :: 3S. 4S. Ergo die zwo Linien

nien AB. CD. seynd den andern zwoen EF. GH. ebenmäßig. d. n. 44. Gesetzt / 2. Daß die Linie AB. nicht ohne Rest etliche mahl das Theil p. ihres andern Satzes EF. in sich hält / so wird auch CD. das Theil S. nicht ohne Rest in sich begreiffen / sondern wird so vielmahls in sich begreiffen / mit einē Rest / als AB. vielmahls p. in sich begreiffet mit einem Rest; alsdann muß man voraus nehmen / oder præsupponiren / daß sie in unendlich kleine Theile zertheilet ist; und wañ nun AB. noch nicht accurat ohne Rest eine gewisse Zahl dieser Theile in sich hält / so wird auch wiederum CD. nicht accurat und ohne Rest eine gewisse Zahl der Theile von GH. in sich begreiffen / uñ werden allezeit zugleich / oder alle beyde mit Rest / oder alle beyde ohne Rest bleiben / und sonst in gleicher Zahl / aber in dem letzten Fall wo ein Rest ist / so wird man den Rest fahren lassen und für nichts achten / wie wir bey den ungemeinmäßlichen Verhaltnüssen gesagt haben / und wird man doch schliessen / wie zuvor d. n. 51. daß die Linien AB. CD. den andern EF. GH. ebenmäßig seynd.

Woraus folget 1. Daß auch alternando, die zwo Linien AB. EF. weil sie in parallel-Raum gleich schief seynd / so seynd sie auch den andern zwo gleich schieffen CD. GH. ebenmäßig d. n. 81.

2. Der product von AB. GH. welche die äusserste Sätze seynd / ist gleich dem product der zwey mittelsten. d. n. 71.

II.

II. Fig. 107. Wann zwo Linien AB, CD. 239
die zwischen zwo = AC, BD. begriffẽ/durch
eine dritte = EF. zertheilet seynd/so seynd
sie proportionirlich zertheilet.

Dann man kan die gantze AB. und auch ihre Theile AE. EB. als unterschiedene Linien betrachten / die gleichschief seynd in unterschiedenen parallel-Raumen / gleichfals auch die gantze CD. und ihre Theile CF, FD. seynd gleich schief in unterschiedenen parallel Raumen. Ergo D. n 238. die gantze AB. und ihre Theile seynd ebenmäßig der gantzen CD. und ihren Theilen das ist. AB. CD : : AE. CF : : EB. FD.

III. Fig. 108. Wann zwo Linien AB. AD. 240
einen Punct A. haben der allen beyden zu-
höhret/ und daß sie durch zwo = geschnit-
ten werden/ so werden sie auch proportio-
nirlich geschnitten. Dann wañ man durch A. eine Linie ziehet / die den zwey ẽ andern = sey/ so wird man das beweisen wie bey denen vorigen Beweißstücken/nehmlich/daß AB. AD. AE. AF : : EB. FD.

IV. Fig. 109. Wann zwo Linien AB. AC. 241
die einen gemeinen punct A. haben / auf ih-
ren Grund-Strich BC. gleich schief seynd /
zwoen andern DE. DF. die auch einen gemeinẽ punct D. haben/so seynd die zwo ersten AB AC. den zwoen andern DE, DF. ebenmäßig.

Dann wann man durch die Punct A. und D. denen Grundstrichen BC. EF. = Linien ziehet / der Beweiß wird eben der

seyn/ wie bey der ersten Eigenschafft. n. 238.

242 V. Fig. 110. Wann zwo = geschnitten werden durch zwo andere Linien AB. AC. die einen Punct A. gemein haben/ die Theile dieser = BC. EF. die da abgeschnitten werden/ stehen gegeneinander/ als die Linien AB. AE. die begriffen seynd zwischen jeden parallelen / und dem gemeinen <A. das ist BC. EF :: BA. EA.

Dann d. n. 202. die zwo Linien BA. BC. seynd eben so schi ff auff ihren Grundstrich AC. als die zwo EA. EF. auf ihren Grundstrich AF. Ergo d. n. 238. die Theile der = BC. EF. stehen gegeneinander wie BA. gegen EA. das ist BC. EF :: BA. EA.

243 VI. Fig. 111. Wann zwo = BD. EG. geschnitten werden durch viele andere Linien die einen Punct A. gemein haben als AB. AC AD. die Theile der einen seynd ebenmäßig mit den Theilen der andern.

Dann d. n. 238. BC. EF :: CA. AF. Eben auch CD. FG :: CA. FA. Ergo d. n. 70. BC. EF :: CD. FG.

244 Daraus folget/ daß wann eine = in gleiche Theile getheilet ist / so ist es die andere auch.

245 VII. Fig. 112. Wann zwo Chordæ in einem Circkel als AB. CD. einander durchschneiden/ in E, die Theile der einen AE. EB seynd den Theilen der andern CE. ED. wiederkehrig proportional, Das ist. AE. CE :: ED. EB.

Dann

Dann ziehet die Linien AC. BD. die Winckels A. und D. seynd gleich/ d. n. 222. Weil sie ihre Spitze in der Circumferentz haben/ und ruhen auf einen Bogen BC. Eben darum seynd die zwey Winckels B. und C. auch gleich. Ergo, so seynd die Linien AE. CE. eben so schieff auf ihren Grundstrich AC. als die anderen zwo ED. EB. auf ihren Grundstrich BD. Ergo d. n. 241. AE. CE :: ED. EB. Ergo die Theile einer Chorda AE. EB. seynd wiederkehrig proportional mit den Theilen der andern CE. ED. W. Z. B. W.

Hieraus folget d n. 71. 1. Daß wann zwo Chordæ in einem Circkel einander durchschneiden/ als AB. CD. der product der Theile der einen/ AE mit EB. ist gleich dem product der Theile der andern/ CE. ED. 246

2. Fig. 113. Daß wann eine von beyden als CD. in zwey gleiche Theile geschnitten ist/ ihre Hälffte CE. ist mittel-proportional zwischen die Theile AE. EB. der andern/ und folglich/ daß der □ dieser Hälffte gleich ist dem product der Theile AE. EB. 247

3. Fig. 113 Daß wann man aus einem punct C. der Circumferentz eine ⊥ CE. auf einem diameter AB. fallen lässet / so wird sie mittel-proportional seyn zwischen die Theile AE. und EB. des diameters; dann wann man diese ⊥ fortziehet in D. so ist CE. die Hälffte der Chorda CD. 248

VIII. Fig. 114. Wann man aus einem 249

punct ausser einem Circkel E. zwo Linien EB. EC. in dem Circkel ziehet/ biß an dem hohlen Bogen BC, und die oben die Circumferentz schneiden in A. und D; die gantze Linie EB. und ihr auswendiges Theil EA seynd widerkehrig proportional mit der andern gantzen Linie EC. und ihrem auswendigen Theil ED. das ist EB. EC :: ED. EA.

Dann ziehet die Linien AC. BD. die Winckels B. und C seynd gleich/ wie auch die zwey BAC. BDC. d. n. 222. und darum auch deren supplementen EAC. EDB. d. n. 166. Ergo so seynd die zwey Linien ED. EB. eben so schief auf ihre basis BD. als wie die zwo EC. EA. auf ihre basis AC. Ergo d. n. 241. EB. EC :: ED. EA. welches zu beweisen war.

250 Hieraus folget d. n. 71. 1. Daß der product der einen gantzen EB. mit ihrem auswendigen Theil EA. gleich ist dem product der andern gantzen EC. mit ihrem auswendigen Theil ED.

251 2. Fig 115. Daß wann die Linie EC. eine Tangens ist/ so ist sie mittel-proportional zwischen die gantze EB. und ihrem auswendigen Theil EA. weilen alsdann die puncten C. und D. aufeinander fallen/ und daß die Linien ED. und EC. nur eine Linie worden seynd/ und derowegen auch/ ist sie mittel proportional zwischen der gantze EB. und ihrem Theil EA. dann der Winckel E. dienet zu den zweyen Triangeln EBD. EAD,

EAD und der Winckel EBD. ist gleich dem Winckel EDA. weil ein jeder für sein Maaß hat die Hälffte des Bogens AC. d.n. 219. und 220. darum ist EB. EC:: EC. EA d.n. 241.

3. Daß wann die Linie AB die in dem Circkel begriffen ist/ gleich ist mit der Tangens EC. so wird alsdann die Linie EB. geschnitten seyn in media & extrema ratione im punct A. 252

Dann/ EB. EC:: EC. EA. nun aber setzet AB an statt ihrer gleichen EC. so habt ihr die folgende EB. AB:: AB. EA.

Problemata oder Werckstücke.

I.

MAnn drey Linien A. B. C. Fig. 116. gegeben werden/ und man soll eine vierdte proportional finden? 253

Ziehet zwo Linien die einen beliebigen Winckel E. machen/ auf eine derselben nehmet das Theil EF. gleich der Linien A. und auf die andere EG gleich der Linie B. ziehet die Linie GF. hernach auf EF. nehmet FH gleich C. und ziehet HK. ═ mit FG. machet die Linie D. gleich der Linie GK. welche die vierdte gesuchte Ebenmäßige seyn wird. d. n. 238.

Dann wegen der ═ GF. HK. man hat EF. EG:: FH. GK. und darum auch A. B:: C. D.

II Fig. 117. Wann zwo Linien A. und B. 254

gegeben werden / und man soll ihnen eine dritte proportional finden? Machet b. gleich B. und so habt ihr drey Linien A. B. b. denen ihr eine 4te proportional suchet/ wie im vorigen Problema.

255 III. Fig. 118. Zwischen zwo gegebene Linien A. und C. soll man eine mittel-proportional finden? Ziehet eine ungeendete Linie / auf welcher nehmet DE. gleich der Linie A. und EF. gleich C. theilet DF. in der Mitten in O. aus O. als Centrum mit dem Radius OD. oder OF. beschreibet einen Circkel/ und auf E. machet die ⊥ CE. biß an die Circumferentz und machet B gleich EC. dieselbe wird die gesuchte Mittel-pro portional seyn. Dann / DE. EC:: EC. FE. und darum auch A. B:: B. C.

256 IV. Fig. 119. Eine gegebene Linie AB. in media & extrema ratione zu theilen?

An einem Ende B. der gegebenen AB. machet die ⊥ BO. gleich der Hälffte von AB. Aus O. als Centrum mit dem Radius OB. beschreibet einen Circkel / aus dem andern Ende A. durch das Centrum O. ziehet die Linie AD. welche die Circumferentz in E. schneiden wird/ machet AC. gleich AE. und so wird AB. in media & extrema ratione getheilet seyn. Das ist / AB. AC:: AC. CB.

Dann ED. ist gleich AB. weil sie der Diameter des Circkels ist/ dessen Radius BO. gleich ist der halben AB. und weil AB. Tangens

gens ist/ so ist d. n. 251. AD. AB. AB. AE. oder AC. welcher sie gleich ist/ nun d. n. 83. Dividendo AD — AB. AB :: AB — AE. AE. Das ist/ AC. AB :: BC. AC. Dann AC. > AE. Endlich wieder d. n. 81. permutando. AB. AC :: AC. BC. darum ist dann AB. in media & extrema ratione getheilet.

Ende des andern Buchs.

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Oder

Gründe der Erdmeßkunst.

III. Buch.

Von den flachen Figuren/ betrachtet nach ihrem Umkreiß/ und den Linien die man drinnen ziehen kan.

Cap.

gegeben werden / und man soll ihnen eine dritte proportional finden? Machet b. gleich B. und so habt ihr drey Linien A. B. b. denen ihr eine 4te proportional suchet / wie im vorigen Problema.

255 III. Fig. 118. Zwischen zwo gegebene Linien A. und C. soll man eine mittel-proportional finden? Ziehet eine ungeendete Linie / auf welcher nehmet DE. gleich der Linie A. und EF. gleich C. theilet DF. in der Mitten in O. aus O. als Centrum mit dem Radius OD. oder OF. beschreibet einen Circkel / und auf E. machet die ⊥ CE. biß an die Circumferentz und machet B gleich EC. dieselbe wird die gesuchte Mittel-proportional seyn. Dann / DE. EC:: EC. FE. und darum auch A. B:: B. C.

256 IV. Fig. 119. Eine gegebene Linie AB. in media & extrema ratione zu theilen?

An einem Ende B. der gegebenen AB. machet die ⊥ BO. gleich der Hälffte von AB. Aus O. als Centrum mit dem Radius OB. beschreibet einen Circkel / aus dem andern Ende A. durch das Centrum O. ziehet die Linie AD. welche die Circumferentz in E. schneiden wird / machet AC. gleich AE. und so wird AB. in media & extrema ratione getheilet seyn. Das ist / AB. AC:: AC. CB.

Dann ED. ist gleich AB. weil sie der Diameter des Circkels ist / dessen Radius BO. gleich ist der halben AB. und weil AB. Tangens

gens ist/ so ist d. n. 251. AD. AB. AB. AE. oder AC. welcher sie gleich ist/ nun d. n. 83. Dividendo AD—AB. AB :: AB—AE. AE. Das ist/ AC. AB :: BC. AC. Dann AC. ∞ AE. Endlich wieder d. n. 81. permutando. AB. AC :: AC. BC. darum ist dann AB. in media & extrema ratione getheilet.

Ende des andern Buchs.

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Oder

Gründe der Erdmeßkunst.

III. Buch.

Von den flachen Figuren / betrachtet nach ihrem Umkreiß / und den Linien die man drinnen ziehen kan.

Cap.

Caput I.

Von den flachen Figuren ins gemein.

I.

257 MAn nennet flache Figur/ eine Fläche die um und um zugeschlossen ist.

In diesem Buch wollen wir nur betrachten die Linien welche die Flächen zuschliessen/ in dem folgenden aber/ wollen wir die Flächen selbsten/ oder den inwendigen Raum betrachten.

258 II. Es seynd insgemein dreyerley flache Figuren. Geradlinichte/ welche mit geraden Linien umgekreiset seynd/ als fig. 1. krumlinichte/ die mit krummen Linien geschlossen werden/ als Fig. 2. und vermischte/ welche theils mit krummen/ theils mit geraden Linien geschlossen seynd/ als Fig. 3.

259 Die geradlinichte Figuren ziehen ihre Nahmen/ bald von den Seiten/ bald von den Winckeln.

Eine Figur von drey Seiten wird genannt Triangel als Fig. 4.

Von 4. Vier Eck.

Von 5. Fünff Eck.

Von 6. Sechs Eck und so fort biß auf dem Zwölff-Eck.

Wann

Wann sie mehr als 12. Seiten haben werden sie insgemein Viel-Eck genandt. 260

III. Man nennet eine Figur Regular, wann alle die Seiten und die Winckel untereinander gleich seynd / als Fig. 5. Und wann darinnen etwas ungleiches ist / so werden sie irregular genandt als Fig. 6.

Eine geradlinichte Figur wird genennet im Circkel eingeschrieben / wann alle ihre Winckels an den Umkreiß anstossen / als Fig. 7. und man saget alsdann der Circkel seye der Figur umgeschrieben. 261

IV. Unter allen krumlinichten Figuren / betrachtet man in der gemeinen Geometrie nur den Circkel / Fig 8. und unter den vermischten / nur den Sector und das Segmentum. 262

Fig. 9. Der Sector ist ein Theil eines Circkels beschlossen von zweyen Radius und von einem Bogen / als A. 263

Fig. 10 Das Segmentum ist ein Theil eines Circkels beschlossen von einem Bogen und einer Chorda als B. 264

Wann man eine Figur abzeichnet / so thut man es mit gewissen und umschränckten Beding Conditiones, oder Umstände. Diese Umstände seynd die Stellung der Puncten / die Länge der Linien / die Oeffnung der Winckel und die Grösse der Fläche / das ist / des inwendigen Raums. 265

Fig. 11. Eine Figur ist umschräncket oder determiniret durch gegebene Beding oder 266

Umstände/wann sie nur auf ein erley Art kan gemacht werden mit solchen Beding. Also ist der Circkel A. determiniret / wann die Länge des Radius determiniret ist / oder wann die Stellung dreyer puncten seines Umkreises determiniret ist.

267 Woraus folget / daß wann zwo Figuren mit eben denselbigen Beding determiniret oder umschräncket seynd / so seynd sie in allem gleich/ und haben einerley und gleiche Eigenschafften/und kan man sie alsdann betrachten als eine Figur, oder als wann die eine auf die andere wäre geleget worden/ und daß sie also alle beyde auf einmahl wären gezeichnet worden.

268 Eine Figur hat zwo determinationes, wann sie / mit den gegebenen Beding / auf zweyerley Weise kan gemacht werden / und sie ist unumschräncket oder indeterminiret / wann sie auf unendlich viele Weisen könte gemacht werden allzeit mit den vorgegebenen Beding.

269 Wann wir zwo Figuren miteinander vergleichen/ so sagen wir/ sie seyen **gleich groß**/ (oder schlecht hin) **gleich** / wann der inwendige Raum der einen/ gleich ist mit dem inwendigen Raum der andern / also werden wir sagen/ daß ein △ gleich ist einem □ oder einem Circkel/ wann die Fläche oder inwendiger Raum des Triangels gleich ist der Fläche des quadrats oder des Circkels.

270 Fig. 12. Zwo Figuren M. und N. seynd gleich-

gleichförmig/ wann ein jeder Winckel der einen/ gleich ist einem correspondenten Winckel der andern/ und daß alle Seiten gegen einander proportional oder ebenmäßig seynd in gleicher Ordnung.

Fig. 13. Zwo Figuren P. und Q. seynd einander gleich und gleichförmig/ wann die Seiten und die Winckels der einen/ gleich seynd/ den Seiten und denen Winckeln der andern in gleicher Ordnung. 271

Caput II.

Von denen Triangeln.

WIr haben △ genannt eine Figur die mit drey gerade Linien geschlossen ist/ als ABC Fig 14. 272

In einem △ nennet man Grundstrich/ welche Seite man will/ als AB. und alsdann werden die zwo andere CA. CB. die Schenckel oder die Seiten genennet/ und der Winckel C. der über dem Grundstrich stehet/ heisset die Spitze des Triangels/ und die ⊥ CD. die von der Spitze auf dem Grundstrich fallet/ fortgezogen wann es nöthig ist/ die ist die Höhe des △.

Eigenschafften.

I.

MAn kan allezeit einen Circkel durch die drey < A, B, C, Fig. 15. fah- 273

ren lassen / weil man allezeit einen Win-
ckel kan fahren lassen durch drey puncten,
die nicht in gerader Linie stehen d. n. 151.

274 II. Fig. 16. Man kan die zwey Schenckel
cA. cB. betrachten als wann sie in ei-
nem parallel-Raum begriffen wären.

275 Durch welche man wil von diesen zwoen
Eigenschafften kan man alle die andere be-
weisen.

276 III. Fig. 17. Die drey Winckel zusammen
eines Triangels ABC. seynd zweyen geraden
Winckeln gleich / das ist / daß sie 180.
Grad für ihr Maaß haben. Dann durch
die erste Eigenschafft kan man diesem Tri-
angel einen Circkel umschreiben / und als-
dann hat der Winckel A. die Hälffte des
Bogens BC für seine Maaß / der Winckel
B. die Hälffte des Bogens AC. und der
Winckel C. die Hälffte des Bogens AB.
darum haben dann die drey zusammen die
Hälffte des gantzen Circkels oder 180. Grad /
für ihre Maaß.

277 Fig. 16. Oder durch die andere Eigen-
schafft / ziehet durch die Spitze dem Grund-
Strich AB. die = CD. Der Winckel
a. ist seinem inwendigen gegenüberstehen-
den A. gleich / d. n. 200. der < b. ist seinem
umwechselenden B. gleich / d. n. 199. Aber
die drey a. b. c. zusammen seynd zweyen ge-
raden gleich / d. n. 167. Ergo die drey A.
B. C. zusammen seynd auch zweyen geraden
< gleich.

Hie-

Hieraus folget 1. Fig. 16. daß wann man eine Seite eines △ verlängert/ der auswendige ∠ a. + b. ist gleich denen inwendigen gegenüberstehenden A. + B. zusamen. 278

2. Daß wann man zwey ∠ eines △ kennet/ so kennet man auch den dritten/ weil er mit den zwey bekanten 180. Grad ausmachet; aber wenn ein △ zwey einander gleiche ∠ hat/ so ist es genug/ daß man einen von den dreyen hat/ um sie alle drey zu erkennen. 279

3. Ein △ kan nur einen geraden oder nur einen stumpffen ∠ haben/ aber er kan sie wol alle 3. spitzig haben. 280

Fig. 18 Ein Triangel wird recht winckelicht oder Rectangulum genant/ wann er einen Winckel A. recht hat/ und die Seite BC. die dem rechten ∠ gegenüber stehet/ wird genant hypothenusa. 281

4 Die zwey spitzige ∠ eines geradwinckelichten △ seynd 90 gradus gleich/ und einer ist das Complement des andern. 282

5 Ein △ der einen stumpffen ∠ hat/ wird stumpffwinckelicht/ oder Amblygonium genant/ als EFG. Fig. 19. 283

6. Ein △ dessen alle 3 Winckel spitzig seynd/ wird scharffwinckelicht oder spitzwinckelicht oder Oxygonium genant/ als HIK. Fig. 20. 284

IV. Die Seiten der △ folgen die Beschaffenheiten ihrer gegenüberstehenden ∠ das ist/ die Seiten seynd einander gleich wann die ∠ einander gleich seynd/ und sie 285

seynd ungleich wann die < ungleich seynd/ und alsdann stehet die längste Seite gegenüber dem grösten <.

Fig. 21. Dann wann man durch die Spitze C. des △ eine ═ Linie ziehet mit dem Grund-Strich AB/ die zwey Schenckel werden in einem parallel-Raum begriffen seyn/ und alsdann 1. wann die zwey < A. und B. einander gleich seynd / so seynd die zwo Seiten CA. CB. gleich schief in einem parallel Raum / und darum auch einander gleich d. n. 191 2. Wann die < E. und F. Fig. 22. ungleich seynd/die Seiten DE. DF. seynd ungleich schief in einem parallel-Raum/und darum auch ungleich/ und alsdann/ die am meisten schief ist DF und die dem grösten < E. gegenüber stehet/ ist auch die Längste d. n. 191.

286 Eben auf die Art kan man beweisen/ daß die < eines △ die Beschaffenheiten der Seiten folgen.

287 Fig. 23. Ein △ dessen alle Seiten gleich seynd/ und folglich auch alle <, deren einjeder ist von 60 Grad / wird æquilaterum, oder gleichseitig genannt.

288 Ein △ der zwo Seiten gleich hat / und folglich auch zwey <, wird Isosceles gleichschenckelicht genant / als Fig. 24.

289 Fig. 25. Ein △ dessen alle Seiten ungleich seynd / wird ungleichseitig genannt / oder Scalenum.

290 V. Fünf Dinge muß man in einem △ be-

betrachten/ nemlich drey Seiten und zwey Winckel/ dann was den dritten < angehet/ es ist nicht nöthig ihn zu betrachten/ weil er determiniret ist/ wann es die zwey andern seynd.

Fig 26. Wann ein △ abc. drey von diesen 5. Dingen gleich hat/ dreyen Dingen gleiches Nahmens des △ ABC. und in gleicher Ordnung/ so seynd diese zwey △ auch in allem gleich. 291

1. Fig 28. Wann die drey Seiten des △ abc. gleich seynd den drey Seiten des △ ABC so seynd diese zwey △ in allem gleich/ das ist/ daß ihre Fläche oder eingeschlossener Raum/ und auch ihre Winckels alle gleich seynd/ ein jeder dem der ihm correspondiret. 292

Dann wann man den Grund-Strich ab. des einen/ stellet und beschicket auf dem Grund-Strich AB. des andern/ sie werden sich d. ax. VII. accurat aufeinander schicken. Uberdem/ wird die Spitze des einen fallē auf der Spitze des andern. Dann das Ende der Seite ac. wird fallen in dē Umkreiß eines Circkels dessen Centrum wäre A C. d. n 129. Eben desgleichen wird das Ende der Linie bc. auch in dem Umkreiß eines Circkels fallen dessen Centrum wäre B. der Radius BC. aber diese zwey Circkels schneiden sich auf einer Seite des Grund Strichs nur in dē punct C. Ergo so kan dann die Spitze c. nirgends

gendswo anders fallen/als in dem Schnits-Punct C. darum schicken sich dann die zwo Seiten ac. bc. des ersten △ auf die zwo Seiten des andern AC. BC. und wird sich der gantze △ abc. einrichten und passen auf dem △ ABC. Ergo so werden die Flächen auch gleich seyn/ und weil ein jeder < des einen sich accurat schicket mit einem < des andern/ so seynd sie auch d. ax. IV. einander gleich.

293 2. Fig. 26. Wann die zwo Seiten ca. cb. eines △ gleich seynd denen zwo Seiten AC. BC. eines andern △/ und der < c. zwischen diese zwo Seiten begriffen/ auch gleich dem < C. begriffen zwischen die zwo andere / so werden diese zwey △ in allem gleich seyn / nemlich der Grund-Strich/ die < auf dem Grund-Strich / und die Fläche des einen werden gleich seyn/ den Dingen gleiches Nahmens des andern.

Dann wann man ac. des einen auf AC. des andern stellet/ bc. des ersten wird auch auf BC. des andern fallen / weil der < c. gleich gesetzt wird dem <C. und das Ende / b. wird auf B. fallen/ wie dieses alles natürlich klar. Ergo so wird der Grund-Strich des einen auf dem Grund-Strich AB. des andern fallen/ u sich miteinander schicken/ u. darum auch einander gleich seyn; Eben darum die <a. und b. werden den < A. und B. gleich seyn/und die Fläche des △ abc. gleich der

der Fläche des △ ABC. und also seynd die △ in allem gleich.

3. Fig. 27. Wann die zwo Seiten da. db. 294
eines △ gleich seynd zwoen Seiten DA. DB. eines andern △ und ein < a. der basis, auch gleich einem < A der andern basis, und daß zugleich die zwey andere < b. und B. der basis einer Art seynd / das ist / oder alle beyde spitzig / oder alle beyde stumpff / solche zwey △ seynd in allem gleich; nehmlich / der Grundstrich / die zwey < drauff / und die Fläche des einen △ / seynd gleich denen Dingen gleiches Nahmens des andern. △

Dann wann man die Seite ad. des einen stellet auf die Seite AD. des andern / der Grundstrich ab. wird auch liegen auff den Grundstrich AB. weil die < a. und A. gleich seynd / das Ende b. der Seite db. wird auch fallen in der Circumferentz eines Circkels / dessen Centrum wäre D. und der Radius DB. welche den Grundstrich in B. schneidet und in E. Aber das Ende b. kan nur auf B. fallen / dann wann es in E. fallen würde / so wäre der < DEA. nicht einer Art mit dem < dba. Ergo, so wird sich dann der Grundstrich ab. schicken mit dem Grundstrich AB. und wird demselben gleich seyn. Aus gleicher Uhrsach die < b. und d. werden auch gleich seyn den < B. und D. und die Fläche des △ abd. gleich der Fläche des △ A B D. Ergo so seynd dann die zwey Triangel in allem gleich.

295 4. Fig. 28 Wann ein △ abc. seinen Grundstrich ab gleich hat dem Grundstrich AB. eines andern △ ABC. und zwey < a. und c. gleich den zweyen < A. und C. die ihnen correspondiren/ solche zwey △ werden in allem gleich seyn. Das ist/ daß der dritte < b. wird dem dritten B. gleich seyn; Die zwo Seiten ac. bc. denen zwoen AC. BC. und die Fläche des einen/ der Fläche des andern.

Dann d. n. 279. der dritte < b. muß dem 3ten B gleich seyn/ weil sie die Supplement seynd auff 2. gerade von zweyen gleichen < und wann man die basis ab. auf die basis AB. stellet/ die zwo Seiten ac. bc. werden auf CB. AC. fallen/ weil die < a. und b. gleich seynd den < A und B. Ergo so werden dann die zwo Seiten ac. bc. den zweyen AC. BC. gleich seyn/ und der gantze △ abc. gleich dem △ ABC.

296 5. Fig. 29. Wann die drey < a, b, d. eines △ gleich seynd den dreyen < A, B, D. eines andern △ Daraus folget nicht daß diese zwey △ einander gleich seynd. Dann wann man auf dem Grundstrich AB. das Theil AE. gleich machet mit ab. und daß man ziehet EF. ═ DB die zwey △ AEF. ADB. werden gleiche < haben/ wiewohl sie nicht gleich groß seynd/ weil einer nur ein Theil des andern ist/ und damit sie gleich groß wären/ so müsten AE. und AB. gleich seyn/ und dann würde es der vierte casus seyn.

297 Aus vorhergehenden Vortrag/ folget/ daß

daß um einem △ umzuschräncken oder zu determiniren/ so müssen drey Dinge determiniret seyn von denen fünff die wir betrachtet haben/ weil man mit dreyen derselben nur einen/ oder lauter gleiche △ machen kan. Dennoch muß man observiren/ daß ein △ in dem 3ten casu zwo determinationes haben kan/ wann die Seite die dem bekandten < gegenüber stehet/ die kleineste ist von den zwoen Seiten/ und daß die Art des andern < auf die basis nicht determiniret ist.

VI. Fig. 30. Wann in einem △ adb. die 298
zwo Seiten ad. db. gleich seynd denen zwo Seiten AD. DB eines andern △ und daß der < d. den sie begreiffen/ grösser ist als der < D des andern/ so muß der Grundstrich ab. auch grösser seyn als der Grundstrich AB.

Dann wann man die Seite ad. stellet auf AD. die ihr correspondiret/ so wird die andere Seite db. aus dem △ ADB fallen/ weil der < d. grösser ist als der < D und die Enden b. und B. der Grundstrichen werden sich nicht miteinander schicken/ und wann man d. n. 148. eine Linie DE ziehet/ deren alle die punct gleich entfernet seynd von b. und B. Der punct A. wird auf die Seite dieser Linie stehen gegen B Ergo so wird dann d. n. 126. der punct A. näher an B stehen als an b. und folglich/ wird auch der Grundstrich ab. der dem grösten < d.

gegenüberstehet / länger seyn als der Grundstrich AB. der dem kleinesten D. gegenüberstehet.

299 Woraus fliesset / daß eben in denselben Umständen / wañ der Grundstrich ab / länger ist als der Grundstrich AB. so muß auch der gegenüberstehende < d. grösser seyn als der < D. der der kleinesten Seiten gegenüberstehet.

Problemata oder Auffgaben.

I.

300 AUs drey gegebenen Linien einen △ zu formiren / und müssen die Linien L, M, N. Fig. 31. wann sie nur zwo und zwo genommen / allezeit länger seynd als die die dritte allein.

Ziehet eine Linie AB. gleich der Linie L. Hernach aus einem von beyden Enden A. als centrum, Radius M. machet einen Bogen; aus dem andern Ende B. als centrum, radius N. beschreibet einen andern Bogen der den Ersten in D. durchschneidet / ziehet die Linien AD. BD. so habt ihr den △ ABD. welches clar ist durch die Bewerckstellung.

301 II. Fig. 32. Wann zwo Linien M. und N. gegeben werden / und ein Winckel; einen △ zu formiren / der zwo Seiten gleich diesen zwo gegebenen Linien habe / und der < den sie schliessen / gleich dem gegebenen < O?

Ziehet AB. gleich der gegebenen M. an einem Ende A. ziehet AD. gleich der andern gege-

gegebenen N. und die d. n 170. den < DAB gleich mache dem gegebenen < O. Hernach ziehet DB. so habt ihr den begehrten △ABD. wie es klar ist durch die Bewerckstellung.

III. Fig. 33. Wann zwo Linien gegeben werden M. N. und ein < O. einen △ zu formiren / dessen zwo Seiten gleich seyen diesen zwoen gegebenen Linien / und daß der < den die Linie N. unterspannet / gleich seye dem <O? 302

Ziehet die ungeendete AZ. an einem ihrer Enden A. ziehet AD. gleich einer gegebenen M. und die d n 170. den < DAZ gleich mache dem gegebenē <O. hernach aus D. als centrum, mit der Oeffnung N. machet einen Bogen / der die Linie AZ. in einem punct B. schneide gegen Z. wann die Linie N. die dem < O. gegenüber stehen soll länger ist als M. hernach ziehet DB. so habt ihr den begehrten △ADB. klar durch die Bewerckstellung.

Fig. 34. Wann aber die Linie N. die den gegebenen < unterspannet / kleiner ist als M. alsdann wird der Bogen aus D. Fig. 34. gemacht die Linie AZ. in zwey Punct B. und E. durchschneiden / derowegen um diesen △ zu determiniren / muß man noch wissen ob der < den die Linie N. mit AZ. formiret / stumpff oder scharff ist / wann er stumpf ist / so ziehet DE. und wann er scharff ist / so ziehet DB. und wird also der △ ADB. nach begehrten Umständen formiret seyn. Klar durch die Bewerckstellung.

Wann

Wann aber nun der Bogen der aus D. Fig 35. mit der Oeffnung N. beschrieben wird/ die Linie AZ nicht schneiden würde/ so ist die Bewerckstellung unmüglich/ und wann der Bogen die Linie AZ. nur in einem punct anrühret und nicht schneidet das ist ein Zeichen daß dieser △ gegē Z. einē geradē < haben wird.

303 VI. Fig 36. Wann eine Linie M. und zwey < O. uñ R. gegeben werden/ einen △ zu formiren / dessen der Grundstrich gleich seye der Linie M. und die zwey < drauf gleich denen zweyen O. und R.

Machet AB. gleich der gegebenen M. und auf ihre Enden A. und B. machet d. n. 170. Winckels die den zweyen O. und R. gleich seynd/ die Linien welche diese < formiren werden/ werden einander Creutzen in D. und werden den begehrten △ ADB. formiren/ welches klar durch die Bewerckstellung.

Caput III.

Von den Viereckichten Figuren.

Benennungen.

I.

304 IN einer Viereckichten Figur, die Linie AD. Fig. 37 die von einem < zum andern gezogen wird/ wird genennet diagonalis oder diameter, auff Teutsch zwerch-Linie

305 II. Fig 38 Eine Viereckichte Figur deren alle die Seiten und alle die < einander gleich seynd/ heisset Quadrat, und wird so gezeichnet. □.

III.

III. Fig. 39. Eine Viereckichte Figur deren alle die < gleich/ und darum auch gerade seynd / aber nur die gegenüberstehende Seiten gleich/ heisset Rectangulum, oder/ Rechtwinckelicht länglicht Viereck. 306

IV. Fig. 40. Eine Viereckichte Figur deren alle vier Seiten einander gleich seynd/ aber nur die gegenüberstehende < gleich/ heisset Rhombus, oder/eine Raute. 307

V. Fig. 41 Eine viereckichte Figur deren nur die gegenüberstehende Seite und auch die gegenüberstehende < einander gleich seynd/ heisset Rhomboides od' länglicht Raute. 308

VI. Eine Viereckichte Figur deren die gegenüberstehende Seiten einander parallel lauffen/ heisset Parallelogrammum / und solche seynd alle die vier vorhergehende 38. 39. 40. 41. 309

VII. Fig. 42. Eine Viereckichte Figur deren nur zwo gegenüberstehende Seiten einander parallel lauffen/ heisset Trapezium. 310

VIII. Fig. 43. Eine Viereckichte Figur deren keine Seite einander parallel lauffen/ heisset Trapezoides, auff Teutsch/ Vierung. 311

Eigenschafften.

I.

In allen Viereckichten Figuren Fig. 44. die vier < zusammen thun so viel als 4. gerade 312

Dann die Zwerch-Linie AD. theilet sie in zwey △ in welchen die < so der Viereckichten

ten Figur auch zuhöhren/vier geraden gleich seynd. d. n. 276.

313 II. Fig 45 In einem parallelogrammo E F G H die gegenüberstehende < E. H. oder F.G. seynd einander gleich / wie auch die gegenüberstehende Seiten EF.GH. und EG. FH d.n. 203.

314 Woraus fliesset 1. Daß wann ein < E. in einem parallelogrammo gerade ist/ so seynd sie alle vier gerade.

315 2. Wann zwo Seiten EF. FH. die einen < begreiffen/ einander gleich seynd/ so seynd sie alle vier gleich.

316 III. So seynd dann die Eigenschafften des parallelogrammi, folgende. 1. Seine gegenüberstehende Seiten seynd ═ 2. Selbige seynd auch einander gleich. 3. Seine gegenüberstehende < seynd auch einander gleich. Wann man dann wissen will ob eine Vierseitige Figur ein parallelogrammum ist / so darff man nur beobachten ob sie durch ihre Beschaffenheiten einige von diesen dreyen Eigenschafften an sich hat / damit ist es genug um das zu beweisen.

317 VI Fig. 46. Die Zwerch-Linie AD. theilet ein parallelogrammum in zwey gleiche Triangel/ dann d. n. 203. solche zwey △ haben ihre drey Seiten respectivé einander gleich. Ergo d. n. 292. seynd sie gleich.

Problema oder Werckstücke.

318 Ein Parallelogrammum zu machen/ dessen Seiten den zwo gegebenen Linien M,N.

M. N. Fig. 47. gleich seyen / und das einen Winckel gleich habe dem gegebenen < O? Machet d n. 170. den < A. gleich dem gegebenen <O. und auff dessen Schenckel / machet die Linien AB. AC. gleich den zwo gegebenen M. und N, hernach aus B. als centrum, und mit der Oeffnung AC machet einen Bogen gegen D. und aus C. als centrum, und mit der Oeffnung AB. machet einen andern Bogen / der den vorigen in D. schneide / ziehet DB. CD. so habt ihr das begehrte. Das ist klar durch die Bewerckstellung.

Caput IV.

Von denen Viel-Ecken.

WIr haben Viel-Eck genennet / eine Figur, die mehr als vier Seiten hat; Dennoch was wir von den Viel-Ecken sagen werden / kan auch verstanden werden von dem Drey und Vier-Eck.

Eigenschafften.

I.

IN allem Viel-Eck / alle die Winckel 319
zusammen genommen / A, B, C, D, E. Fig. 48. thun zwey mahl so viel gerade Winckel / weniger 4. als die Figur Seiten hat.

Dann aus einem < A. ziehet lauter

Zwerchlinien / so werdet ihr die Figur zertheilen in so viel △ als die Figur Seiten hat / weniger zwey / in welchen die Winckel seynd eben die < des Viel-Ecks / aber ein jeder △ d. n. 276. hat seine Winckel gleich zweyen geraden / Ergo alle die < dieser △ werden gleich seyn / zwey mahl soviel geraden Winckeln als Seiten des Viel-Ecks seynd / weniger vier gerade <.

Also seynd alle die < eines Fünff-Ecks 6. geraden gleich; Eines Sechs-Eck 8. geraden / eines Sieben-Eck 10. geraden gleich &c.

320 II. Fig. 49. Zwey Viel-Eck A. und B. seynd einander gleich / wann die Beschaffenheiten die eines von beyden determiniren / eben dieselbe sind / die das andere determiniren.

321 Notiret / daß wann man ein Viel-Eck durch seine Seiten und seine < determiniret / so muß man drey von diesen Dingen auslassen / aber vornehmlich einen Winckel / das übrige gibt die Zahl der Umstände oder Beschaffenheiten / die die Figur umschräncken. Also dann / um ein Viel-Eck zu determiniren / welches zehn Dinge hat / nehmlich 5. Seiten und 5. Winckel / so muß man 7. derselben vorschreiben / unter welchen die 5. Ecken nicht alle begriffen seyen / und muß man in acht nehmen / wie bey den △ die Casus die unterschiedene Determinationes haben.

III.

III. Fig. 49. In den gleichförmigen und gleichgrossen Viel-Ecken A. und B. die Linien FG. fg. die gleicher Weise und mit gleichen Beschaffenheiten drinnen gezogen werden/ seynd auch einander gleich / schneiden gleiche Linien ab/ und formiren gleiche Winckel. 322

Das wird klar erscheinen d. ax. VI. wann man das Viel-Eck A auf dem Viel-Eck B. überträget und auffleget/ dann FG. wird alsdann auff fg. fallen/ und sich mit derselben schicken.

IV. Man kan eine Krumlinichte Figur anschauen als eine geradlinichte Figur von einer unendlichen Zahl Seiten/ und alsdann zwo krumlinichte Figuren A. und a. fig. 50. oder zwo vermischte als B. und b. fig. 51. seynd gleichförmig und gleich groß/ wann die Beschaffenheiten / welche die eine determiniren / eben diese seynd / welche die andere determiniren/ und in gleicher Ordnung/ dergestalt / daß man den krumlinichten Figuren zumessen kan / alles / was wir von den Geradlinichten gesagt haben. 323

Caput V.

Von den Regular-Viel-Ecken.

Wir haben Regular-Viel-Eck genannt/ eine geradlinichte Figur/ deren 324

ren alle die Seiten und alle die < einander gleich seynd.

Fig. 52. Das Centrum einer Regular Figur ist der punct F. der von allen Winckeln gleich entfernet ist.

Eigenschafften.

I.

325 DAs Centrum eines Regular Viel-Ecks ABCDEG. Fig. 52. zu finden? Theilet d. n. 171. die < A. und B. in zwey gleiche Theile durch die Linien AF. BF. alsdann ist der Punct F. das Centrum.

Dann 1. weil die Winckel A, B, C, D, E, G. des Viel Ecks einander gleich seynd / so seynd ihre Hälfften FAB. FBA. auch gleich / Ergo d. n. 285. ihre gegenüberstehende Seiten FA. FB. seynd auch gleich. 2. Ziehet FC. die wird auch gleich seyn mit FA. Dann die △ FBC. FBA. haben 2. gleiche Seiten / und den < den sie schiessen / Ergo d. n. 293. so ist auch die dritte Seite FC. gleich der dritten FA. Auf gleiche Weise / wird man auch beweisen / daß die Linien FD. FE. GF. gleich seynd mit FA. Ergo so ist der punct F. gleich entfernet von allen Spitzen der < u. darum ist er das Centrum des Viel-Ecks.

326 Fig. 53. Die Linien als FA. die vom Centro auf die < kommen / werden Radius des Viel-Ecks / oder schiefer Radius genannt.

327 Fig. 53. Die ⊥ FG. vom Centro auf die eine Seite soll rechter Radius heissen.

Der

Der Winckel ABC. Fig 53 heisset Win- 328
ckel des Umkreises.

Aus vorhergehenden folget 1. Weil die 329
△ AFB. BFC. &c. in allem gleich seynd/daß
die ∠ im Centro, wie auch die gerade Radius einander gleich seynd.

2. Daß wann man aus dem Centro F. 330
mit der Weite des schiefen Radius FA. einen Circkel beschreibet/ derselbe wird um die Figur beschrieben seyn.

3. Daß wann man aus dem Centro F. 331
und mit dem rechten Radius FG. einen Circkel beschreibet/ derselbe wird eingeschrieben seyn.

4. Der ∠ ABC. des Umkreises mit dem 332
∠ AFB. im Centro, seynd zweyen geraden gleich/ dann der ∠ ABC. ist gleich den zweyen ABF. und BAF aber diese zwey mit dem ∠ AFB seynd zweyen geraden gleich. d n. 276. Ergo der Winckel der Circumferentz ABC. mit dem ∠ im Centro AFB. seynd zweyen geraden ∠ gleich.

II. Je mehr Seiten hat ein Regular Viel- 333
Eck/ es mag seyn im Circkel beschrieben als Fig. 54 oder umbschrieben als Fig. 55. Je näher sie an dem Umkreiß des Circkels kommen.

Derowegen kan man einen Circkel anschauen als ein Regular Viel-Eck von einer unendlich grossen Zahl Seiten/ die unendlich klein seynd.

III. Fig. 56. Die Seite AB. eines Regu- 334

lar-Sechs-Eck / ist gleich dem Radius AF. des Circkels/worinnen er beschrieben wird.

Dann d. n. 226. die drey winckel des △ AFB. haben eine halbe Circumferentz für ihr Maaß / aber der ∠ im Centro hat für sein Maaß das sechste Theil der Circumferentz oder das Drittel der halben Circumferentz/ Ergo die zwey andere A. und B. des △ haben die zwey andere Drittel für ihr Maaß/ und weil sie einander gleich seynd / so hat ein jeder das Drittel für sein Maaß / woraus folget d. n. 285. daß alle die Seiten auch einander gleich seynd / weil alle die ∠ gleich seynd.

335 IV. Der quadrat der Seiten eines Regular Fünff-Ecks ist gleich dem Quadrat des Radius mit dem Quadrat der Seiten des Regular Zehen-Ecks.

Fig. 57 Machet einen Circkel/uñ gesetzt/daß in demselben ein vollkommenes Regular Fünff-Eck beschrieben ist / dessen Seite ist MN. ziehet auch die Radius OM. ON. theilet den Bogen MN. d. n. 150 in zwey gleiche Theile in P. ziehet die Chordæ MP. PN. die da seyn werden die Seiten des Zehen-Ecks / theilet die Linie NP. d. n. 149. in der Mitte in Q. ziehet QO. welche MN. in R. wird durchschneiden / ziehet PR.

Der Bogen MPS. ist drey mahl so groß/ als SN. und der Bogen NCB. ist 6. mahl so groß als der Bogen SN. daraus folget d. n. 219. daß der ∠ MOS. ≻ ∠ BMN. oder ONM.

Also

Also haben dann die zwey Triangel OMN. OMR. zwey gleiche ∠ nehmlich den ∠ ROM. ꝏ ∠ONM. und den ∠OMN. gemein. Ergo d. n. 279. seynd sie alle drey gleich/ und d. n. 241. seynd alle ihre correspondente Seiten ebenmäßig/ und also ∺ MN. MO. MR. und darum dann d. n. 72. der □ MO. ꝏ ▭ MN. MR. Ferner/ weil der Radius OS. auf die Mitte von PN. ⊥ stehet/ so folget d. n. 176. daß RP. ꝏ RN. und also d. n. 286 ist der ∠ RPN. ꝏ ∠RNP. und seynd also die zwo d. n. 279 △ PRN. und PMN. gleichwinckellicht/ und darum auch d. n. 241. wird man haben ∺ MN. NP. NR. und folglich d. n. 72. der □. PN. ꝏ ▭ MN. NR. Aus diesem allem folget dann/ daß der □ MO. + □ PN. ꝏ ▭ MN. MR. + ▭ MN. NR. oder ꝏ ▭ MN. MR + NR. oder ꝏ ▭ MN. MN. das ist ꝏ □ MN. Aber PN. ist die Seite des Zehen-Ecks/ und MO. der Radius. Ergo der □ der Seiten des Zehen-Ecks mit dem □ des Radius, seynd gleich dem □ der Seiten des Fünff-Ecks. W. Z. B. W.

V. Wann der Radius des Circkels in 335
media & extrema ratione getheilet wird/ so ist die Seite AB Fig. 58. des Zehen-Ecks/ gleich dem längsten Theil CD. des Radius CA.

Dañ beschreibet das gemeldte Zehen-Eck in dem Circkel/ auf die Seite BA ziehet die zwey Radius CA, CB. ziehet auch BF. also

daß

daß AE EF. zwey Seiten des Zehen-Ecks seynd. Wann man alsdann die zwey Triangel ACB. und ABD. betrachtet / so siehet man gleich d. n. 219. daß der < ACB. ∞ < ABF. oder ABD und der < BAC ist ihnen gemein / und also folget d. n 279. daß diese zwey Triangel gleich-winckelicht seynd / und seynd dann auch alle beyde gleichschenckelicht / weil es ACB. ist. Ergo d. n. 241. AC. AB. (oder BD) :: BD AD. Aber der Triangel BDC. ist auch gleichschenckelicht / weil d. n. 219. der < ACB. ∞ < DBC. oder HBF. Ergo AB. die Seite des Zehen-Ecks / ist das grosse Theil des Radius CA. in media & extrema ratione getheilet W. Z. B. W.

Problemata oder Werckstücke.

I.

337 In einem gegebenen Circkel ein Sechs-Eck zu beschreiben?

Fig 59. Traget den Radius FA. des gegebenen Circkels auf den Umkreiß herum / der wird 6. mahl drauff kommen / d. n. 334. Hernach ziehet Linien von einem punct zum andern / so habt ihr das eingeschriebene Regular Sechs-Eck.

338 Um einen gleichseitigen Triangel in dem Circkel zu beschreiben / muß man ebenfals den Radius Fig. 60. 6. mahl herum tragen / und um die Linien zu ziehen / muß man allezeit eine Theilung überspringen.

339 II. Fig 61. In einem gegebenen Circkel ein Quad-

Quadrat zu beschreiben? Ziehet einen Diameter AD. und demselben / d. n. 185. einen andern Diameter ⊥ CB. diese zwey Diameter werden die Circumferentz in vier gleiche Theile theilen / ziehet die Linien von einem Punct zum andern / so habt ihr das begehrte.

III. In einem gegebenen Circkel ein Regular Fünff-Eck / und auch ein Zehen-Eck zu beschreiben. 340

Fig. 62. Ziehet den Diameter AB. im Centro, machet d. n. 185. die ⊥ CD. theilet den Radius CA. in der Mitten in E. machet EF. gleich ED. nehmet mit dem Circkel die Oeffnung DF. und setzet sie 5. mahl auf die Circumferentz / so habt ihr das Fünff-Eck / hernach nehmet die Oeffnung CF. und setzet sie zehen mahl herum / und ziehet die Linien / so habt ihr das Zehen-Eck.

Um dieses zu beweisen / machet einen Circkel aus dem Centro E. Radius EC. dessen Diameter wird seyn der Radius AC. gleich der Linie CD. ziehet die Linie DG durch das Centrum E. die ist durch den Circkel geschnitten in H; aus D. mit der Oeffnung DH. machet den Bogen HI. und dadurch ist CD. d. n. 256. in media & extrema ratione getheilet in I. und weil CF. so lang ist als DH. oder DI. so ist der Radius CB. auch getheilet in media & extrema ratione in F. Ergo d. n. 336. ist CF. die Seite des Zehen-Ecks. Und weil der Quadrat der Linie DF. gleich ist / wie es hernach d. n. 409. bewiesen wer-

den wird/ den zweyen Quadrat der Linie CD. und CF. das ist/ des Radius, und der Seite des Zehn-Ecks/ so ist sie auch d. n. 335. die Seite des Regular Fünff-Ecks.

341 IV. Wann ein Regular Viel-Eck in einem Circkel beschrieben ist/ und man sol ein anders drinn beschreiben/daß noch einmahl so viel Seiten hat als das erste?

Theilet d. n. 150. einen jeden Bogen der durch eine Seite unterspannet ist/ in zwey gleiche Theile/ als fig. 63.

342 V. Wann ein Regular Viel-Eck in einem Circkel beschrieben ist/ und man soll demselben einen andern umschreiben von eben so viel Seiten?

In allen Puncten der Theilung des Circkels machet d. n. 231. lauter Tangentes, dieselbe werden das begehrte umbeschriebene Viel-Eck beschreiben/ als Fig. 64.

343 VI. Wann ein Regular Viel-Eck in einem Circkel beschrieben ist/ und man soll ein anders machen von eben so viel Seiten/ dessen eine jede Seite gleich sey der gegebenen Linie M?

Fig. 65. In dem eingeschriebenen Viel-Eck ziehet die Radius IA. IB. auff AB. verlängert wo es nöthig ist/ nehmet AK. gleich M. ziehet KL. = dem Radius IA. welche dem Radius, verlängert wo es nöthig ist/ schneiden wird in L. Aus dem Centro I und mit der Oeffnung IL. machet einen neuen Circkel/ der durch die Radius des ersten

sten

ſten / geſchnitten ſeyn wird / in ſo viel gleiche Theile / als das Viel-Eck Seiten hat. Und wo man alsdann die Linien von einem Punct zum andern ziehet / ſo habt ihr das begehrte. Dann d. n. 242. AB. CL. :: IB. IL.

Caput II.

Von denen gleichförmigen Figuren.

WIr haben gesagt / daß zwo Figuren gleichförmig wären / als abcde. und ABCDE. Fig. 66. Wann ein jeder < der einen / dem correſpondirenden < der andern / und in gleicher Ordnung gleich iſt / und daß die Correſpondente Seiten einander ebenmäßig ſeynd. 344

Die Seiten ab. AB. die einander ähnlich ſeynd / wollen wir correſpondente Seite nennen. 345

Die Conditiones Umſtände oder Beſchaffenheiten / womit man zwo Linien fg. FG. in zwo gleichförmige Figuren ziehen kan / ſeynd gleichförmige Conditiones. 346

1. Wann dieſe zwo Linien gleiche <g. und G. mit den Correſpondenten Linien machen?

2. Wann ſie mit den Correſpondenten Linien cg. CG. ebenmäßig ſeynd.

3. Wann ſie die correſpondente Seiten cd. CD. proportionirlich und auf gleiche Weiſe durchſchneiden.

347 Fig. 66. Zwo Linien fg. FG. seynd in gleichförmigen Figuren gleicher Weise gezogen / wann ihre Stellungen durch gleiche Beschaffenheiten determiniret seynd.

348 Zwo krumlinichte oder vermischte Figuren seynd gleichförmig / wann die Linien welche ihre Krümme determiniren / gleicher Weise gezogen werden. Fig. 67.

Eigenschafften.

I.

349 WAnn ein Triangel abd. Fig. 68. zwey < a. und b. gleich hat zweyen < A. und B. eines andern Triangels ABD. solche 2. Triangel seynd einander gleichförmig.

Dann 1. d. n. 226. der dritte < d. eines Triangels ist gleich dem dritten D. des andern Triangels. 2. Nehmet ab. und AB. für die Grundstriche / die zwo Seiten da. db. seynd auf ihren Grundstrich ab. eben so schiefft / als DA. DB. auf ihren Grundstrich AB. Ergo d. n. 241. da. DA : : bd. BD. 3. Nehmet da. und DA. für die Grundstriche / alsdann seynd ba. und bd. auf ihren Grundstrich da. eben so schief als BA. und BD. auf ihren Grundstrich DA. Ergo eben darum ba. BA : : bd. BD : : da. DA. Ergo so seynd dann diese zwey Triangel gleichförmig.

350 II. Fig. 69. Wann die drey Seiten eines Triangels abd. ebenmäßig seynd mit den dreyen Seiten eines andern Triangels ABD. so

seynd

seynd diese zwey Triangel gleichförmig/ das ist / daß ein jeder < des einen wird einem jeden < des andern gleich seyn in gleicher Ordnung a ∞ A. b ∞ B. und c ∞ C.

Dann/nehmet in dem Triangel ABD. De. gleich da. und ziehet ef. ═ mit A B. der Triangel Def weil der < D. ihnen gemein ist/ und daß die < in e. und A. wie auch in f. und B. einander gleich seynd d. n. 200 wird er gleiche < haben mit dem Triangel DAB. Ergo d. n. 241. so hat er auch seine Seiten proportional mit des andern Seiten. Aber man hat gesetzt daß die Seiten des Triangels dab. proportional wären mit den Seiten des Triangels DAB. Ergo d. n. 70. so seynd sie es auch mit den Seiten des Triangels Def. Aber die Seite da. ist gleich der Seite De. Ergo die andere Seiten des Triangels dab. seynd auch gleich den andern Seiten des Triangels Def. und die < des Triangels dab. werden gleich seyn den < des Triangels Def. und folglich auch denen < des Triangels DAB. darum seynd dann die zwey Triangel dab. und DAB. einander gleichförmig.

III Fig. 70 Wann zwo Seiten da. db. 351
eines Triangels ebenmäßig seynd zwoen Seiten DA. DB. eines andern Triangels/ und daß die < d. und D. die zwischen diese Seiten begriffen/ einander gleich seynd/ solche zwey Triangel seynd einander gleichförmig.

Der Beweiß wird dem vorigen gleich seyn.

352 IV. Fig. 71. Wann zwo Seiten ad. db. eines Triangels ebenmäßig seynd den zwoen AD. DB. eines andern Triangels / und daß die < a. und A. die den correspondenten Seiten gegenüberstehen / einander gleich seynd / und über dem / daß die zwey < b. und B. einerley Art seynd / solche zwey Triangel seynd einander gleichförmig.

Dieser Vortrag wird bewiesen eben wie der vorige d. n. 351.

353 Hieraus folget daß die Conditiones oder Beschaffenheiten die zwey Triangel determiniren gleichförmig zu seyn / eben die seynd welche sie determiniren gleich groß zu seyn / mit diesem Unterscheid aber / daß die < und die Seiten müssen gleich seyn / um die Triangel gleich groß zu machen / und daß die < müssen gleich seyn / und die Seiten ebenmäßig / um selbige gleichförmig zu machen.

354 V. Wann die Conditiones oder Beschaffenheiten die eine Figur abcde. determiniren oder umschräncken / gleich seynd denen Conditiones die eine andere Figur ABCDE. Fig. 72. determiniren / solche zwo Figuren seynd einander gleichförmig. Das ist / daß die übrige < einander gleich seynd / und die Seiten ebenmäßig. Gesetzt daß hier ab. AB :: bc. BC :: cd. CD :: de. DE und daß die < c. und C. b. und B. d. und D. einander gleich seynd / so sage ich daß auch ea. EA :: ab. AB.

Dann ziehet in der ersten Figur die

Zwerch-

Zwerchlinien ad. ac. und in der andern Figur ziehet durch die < die den andern correspondiren/ auch AD. AC. 1. Die Triangel abc. ABC. seynd gleichförmig. d. n. 351.

2. Die Triangel acd. ACD. seynd auch gleichförmig. Dann der < bcd. ist gleich dem < BCD. und das Theil bca. ist gleich dem Theil BCA. Darum seynd die Reste acd. ACD. auch gleich. Uber dem ac AC :: bc. BC :: cd. CD. Ergo so ist dann ac. AC :: cd. CD. d. n. 70. Darum seynd auch die Triangel acd. ACD. d. n. 351. gleichförmig.

3. Auf gleiche Weise wird man beweisen / daß die Triangel ade. ADE. gleichförmig seynd / woraus man endlich schliessen wird / daß die < a. und A. e. und E. auch gleich seynd / und daß ea. EA :: ab. AB.

VI. Fig. 73. Wann man in den gleichförmigen Figuren abcde. ABCDE. zwo Linien fg FG. ziehet mit gleichen Beschaffenheiten oder conditiones; seynd sie ebenmässig mit den Seiten der Figur / machen gleiche < / und schneiden die andere Seiten proportionirlich. 355

Gesetzt / daß die Linien fg. FG. die Seiten ab. AB. proportionirlich schneiden / und daß sie die zwey < afg. AFG. gleich machen / so sage ich daß sie auch die < fgd. FGD. gleich machen / und daß fg. FG :: cg. CG :: gd. GD.

Dann man kan die zwo Figuren gdeaf.

GD

GDEAF. betrachten als mit gleichförmigen Beschaffenheiten oder Conditiones determinirt/ Ergo d. n. 354. so haben sie alle < gleich uñ alle Seiten proportional, eben so ist es auch mit den zwo andern Figuren fbcg. FBCG.

356 VII. Fig 74. In den gleichförmigen Figuren/ die Umkreiß a b c d e a. ABCDEA. seynd proportional mit den Seiten ab. AB. die correspondent seynd / wie auch mit den Linien fg. F G. die mit gleichen Beschaffenheiten gezogen seynd.

Dann die Circumferentz seynd die Summa der Seiten/ die alle ebenmäßig seynd mit ab. und AB. oder auch mit fg. und FG. Ergo d. n 62. so seynd &c.

357 VIII. Die Regular Viel-Eck von gleicher Zahl Seiten seynd gleichförmig.

Dann ein jeder < der ersten ist gleich einem jeden < der andern / und weil alle die Seiten der ersten gleich seynd/ so haben sie auch eine gleiche Verhaltnüs mit den Seiten der andern/die auch alle gleich seynd/ darum seynd dann diese Regular Viel-Eck/ gleicher Zahl Winckel/ gleichförmige Figuren.

358 Woraus folget 1. daß in den Regular-Figuren von gleicher Zahl Seiten die gerade und schiefe Radius mit der Seiten eben-
359 mäßige Linien seynd. 2 Uberdem/ daß die Umkreise derselben in gleicher Verhaltnüß seynd mit den Seiten / wie auch die gerade und schiefe Radius.

Fig.

Fig. 75. Die krumlinichte oder vermischte Figuren seynd gleichförmig / wañ die conditiones oder Beschaffenheiten welche die eine determiniren / gleichförmig seynd / denen / welche die andere determiniren. 360

Dann man kan diese Figuren betrachten / als geradlinichte Figuren / deren die Seiten unendlich klein seynd / Ergo so kan man diesen Figuren zuschreiben / alles was wir den geradlinichten Figuren zugeschrieben haben.

Woraus folget 1. daß alle Circkel gleichförmige Figuren seynd / eben sowohl als die 361
Sector und die Segmentum, gleicher Zahl gradus. 2. Daß in zweyen Circkeln / die circumferentz / die gleichförmige Bogen / und ihre Chorda die Diameter / die Radius, und insgemein alle die Linien die mit gleichen Beschaffenheiten gezogen seynd / die seynd alle proportional oder ebenmäßig. fig. 76. 77. 362

IX. In allem Regular Viel-Eck in dem Circkel beschrieben / je mehr Seiten sie haben / je grössern Umkreiß haben sie auch. 363

Welches klar erscheinen wird / wann man in einem Circkel zwey Viel-Eck beschreibet / deren eines / noch einmahl so viel Seiten hat als das andere fig. 78.

Hieraus folget / daß der Umkreiß des Circkels länger ist als der Umkreiß eines eingeschriebenen Viel-Ecks / wieviel Seiten dieses letzte auch immer haben möge. 364

X. Unter allen Regular Viel-Ecken / die 365

 man

man um den Circkel beschreiben kan / das/ weiches am meisten Seiten hat / hat auch den kleinesten Umkreiß.

Fig 79. Welches klar erscheinen wird / wann man zwey Viel-Eck um einen Circkel beschreibet / deren eines / noch einmahl so viel Seiten hat als das andere.

366 Hieraus folget / daß der Umkreiß des Circkels / kleiner ist als der Umkreiß / eines ihm umbeschriebenen Viel-Ecks / wie viel Seiten es auch immer haben möge.

Problema oder Auffgabe.

367 Es wird eine geradlinichte Figur 80. ABCDE. gegeben / und man soll derselben eine gleichförmige beschreiben / auf eine Linie die gleich seye der gegebenen Linie M?

Gesetzt / daß die Seite AB. die correspondente seye der gegebenen M. aus A. ziehet die Zwerch-Linien AC. AD. welche die gegebene Figur in △ zertheilen / nehmet auf AB. (verlängert / wo es nöthig ist) die Linie Ab. gleich der gegebenen M. ziehet bc. cd. de. parallelen mit den Seiten BC. CD. DE. der gegebenen Figur / so habt ihr die Figur Abcde. gleichförmig der gegebenen ABCDE. welches klar ist durch das vorhergehende / ohne weitläufftigem Beweiß.

Ende des dritten Buchs.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Oder

Gründe der Erdmeßkunst.

IV. Buch.

Von den Flachen Figuren / betrachtet nach ihrem Inhalt / oder nach dem Raum den sie einschliessen.

UM eine gründliche Wissenschafft zu geben / der flachen Figuren / betrachtet nach dem Raum den sie einschliessen / so muß man 1. Die Gründe oder Principia voran setzen und behaupten / welche dienen umb die Verhaltnüsse der Flächen zu verstehen / und das wollen wir thun durch ihre Indivisibilia, oder Untheilbare Theile. 368

2. Man muß die Merckzeichen geben / wodurch man die Gleichheit zwoer Figuren erkennen kan. 369

3. Man muß die Flächen abmessen. 370

371 4. Man muß die Verhaltnüssen zu verstehen geben/ die sich unter die Figuren befinden.

Caput I.

Von denen Untheilbaren Theilen in den Flächen.

372 Bildet euch lauter gerade oder krumme Parallel-Linien Fig. 1. 2. als a. b. c. d. e. die am Ende der Figur mit kleine ⊥ geschlossen werden; solche Linien werden Parallelogramma Rectangula formiren/ deren die Länge eine Dimension machen/ und die Breiten/ die unendlich kleine ⊥ seynd/ seynd untereinander gleich/ solche parallelogramma werden Untheilbar genennet; Wir wollen sie auch nennen/ Elementa der Figuren.

373 Eine Figur 3. ABC. kan auch in Untheilbare △ getheilet werden/ wann man nehmlich ihren Grundstrich/ in unendlich kleine/ und untereinander gleiche Theile zertheilet/ und daß man aus dem Punct A. Linien ziehet auf alle die Theilungen.

374 Fig. 4. Wann man die drey Figuren C, D, E. in andere kleine/ und untereinander gleiche Figuren zertheilet/ deren die Dimensiones unendlich klein seynd/ solche kleine Figuren werden Einheiten (unitates) genannt

nannt/ welche können seyn Quadrat, Triangel oder Rhombus, und wird man alsdann sagen/ daß solche Figuren in Einheiten getheilet seynd.

Eigenschafften.

I.

375 Alle die Figuren müssen betrachtet werden/ als mit solchen Untheilbaren Theilen erfüllet und bedecket.

Fig. 5. Dann 1. Wann die Figur ein Parallelogrammum rectangulum ist / als ABCD, und daß man unendlich nahe aneinander parallel-Linien ziehet/ mit der Basis CD. so ist es klar/ daß solche Untheilbare Theile lauter Rectangula sind / die solche Figur gantz bedecken und erfüllen.

2. Wann die Figur kein parallelogrammum ist/ aber sonst eine geradlinichte/wie man will/ als Fig. 6. oder krumlinichte als Fig. 7. Solche Untheilbare / wann sie nicht unendlich schmahl seynd/werden an den Enden kleine △ lassen/ welche immer kleiner werden / je schmahler die Untheilbare seynd; Darum / wann man sie dann unendlich schmahl setzet / so werden diese kleine △ verschwinden/ und unempfindlich werden / und müssen also als nicht vorhanden geschätzet werden/ und folglich/ muß man dann allezeit die Figur betrachten/ als accurat mit ihren Untheilbaren Theilen erfüllet und bedeckt.

376 Fig. 6. Hieraus folget/ daß in einer Figur/ die Länge eines Untheilbaren bdce. ist gleich der Linien cd. welche sie von dem folgenden Untheilbaren cdfg. absondert/ weil der Unterscheid den man sich da könte einbilden / wegen der unendlich kleinen Breite / verschwunden und zu nichts worden ist/ und muß auch also für nichts geschätzt werden.

377 II. Zwey Untheilbare D. ax. VI. seynd einander gleich / wann sie gleiche Länge und gleiche Breite haben; und das ist natürlich klar / sie mögen gerad-Linicht seyn / als in Fig. 8. oder krum-Linische / als in Fig. 9. Wann man Linien durch die Mitte ziehet/ als mn und op. und daß man selbige in unendlich kleine und untereinander gleiche Theile zertheilet / und durch die Theilungs-Puncten lauter ⊥ ziehet / solche machen lauter kleine parallelogramma Rectangula in diesen Untheilbaren / welche einander gleich seyn werden/indem ihre Breite auf mn. und op. genommen / einander gleich seynd/ und ihre Höhen auch gleich.

378 III. Fig. 10 11. Die ⊥ AB und CD. welche auf die Untheilbaren zwoer Figuren gezogen werden / werden die Verhaltnüß der Zahlen ihrer Untheilbaren darstellen und representiren / gesetzt daß diese Untheilbare gleicher Breite seynd. Derohalben dann / wann diese ⊥ einander gleich seynd/ so ist auch die Zahl der Untheilbaren in solchen Figu-

Figuren einander gleich / und wann die ⊥ AB. zweyfach ist der ⊥ CD. so ist auch die Zahl der Untheilbaren der ersten Figur zweyfach der Zahl der Untheilbaren der andern.

Caput II.

Von der Gleichheit der flachen Figuren / nach ihrem inwendig begriffenen Raum betrachtet.

Eigenschafften.

I.

Die Parallelogramma gleicher Höhe und gleiches Grundstrichs seynd einander gleich. 379

Fig. 12. Gesetzt / daß die zwey Parallelogram. ABDC. EFHG. gleicher Höhe seynd / das ist / daß die ⊥ KL. MN. die auff die Grundstriche gezogen werden / einander gleich seynd / oder daß selbige Figuren zwischen zwo Parallel Linien AF. CP. begriffen seynd; gesetzt über dem / daß ihre Grundstriche CD. GH. auch einander gleich seynd / so sage ich / daß diese zwey Figuren nach dem Raum einander gleich seynd.

Dann wann man sie alle beyde in ihre Untheilbaren zertheilet / durch Linien / die mit dem Grundstrich parallel lauffen / so wird es geschehen. I.

I. Daß ein jedes Untheilbares Theil (welches wir auch Elementum wollen nennen/) in dem einen Parallelog. gleich einem jeden Elementum in dem andern/ d. n. 377. weil in einem jeden Parallelogr. ein jedes Elementum hat seine Länge gleich dem Grundstrich/ nun aber setzen wir daß die Grundstriche einander gleich seynd/ Ergo so seynd dann auch die Längen der Elementen in beyden Parallelogr. einander gleich/ und ihre Breiten seynd auch gleich voraus gesetzt/ darum seynd sie in allem gleich. Uber dem/ so ist auch die Zahl dieser Elementen in diesen Figuren einander gleich/ weil d. n. 378. diese Zahl durch die ⊥ MN. KL abgemessen werden/ die hier einander gleich seynd/ weil dann ein jedes Parallelogr. ABDC. und EFHG. einerley Zahl gleicher Elementen in sich hält/ so seynd sie einander gleich.

380 II. Fig. 13. Zwey △ ABD, FGH. welche gleiche Höhe und gleiche bases haben/ seynd einander gleich.

Dann man ziehe nur DC. ═ AB. FH. ═ EG. AC. ═ BD. und EF. ═ GH. so wird man sehen d. n. 317. daß solche △ die Hälffte seynd/ zweyer Parallelogr. die gleiche Höhe und gleiche Grundstriche haben.

381 III. Fig. 14. Ein Parallelogr. ABDC. ist gleich einem △ ECD. wann es mit ihm einen Grundstrich hat CD. und daß seine Höhe FG nur die Hälffte ist der Höhe EG. des △; oder/ wann es gleiche Höhe hat/ und

und daß es nur die Hälffte des Grundstrichs hat Fig. 15.

Dann 1. Fig. 14. Gesetzt daß das Parallelogr. ABDC. Rectangulum seye / so wird es die vierseitige Figur CHKD. mit dem △ ECD. gemein haben.

2. Der △ ACH. ist gleich dem △ HEF. dieweil die < in H die an der Spitze einander gegenüberstehē d. n. 169 einander gleich seynd/die < F. u. A. seynd gerade / u. die Seiten EF. AC. einander gleich/darum weil sie zwey < und eine Seite einander gleich haben / so seynd sie in allem gleich. d. n. 295. Aus gleicher Uhrsach/ seynd die zwey △ BDK. EFK. einander gleich/ Ergo die zwey △ ACH. BDK. mit dem Trapezio CHKD. welche zusammen das Parallelogr. ausmachen / seynd gleich den zweyen △ EFH. EFK. auch mit demselben Trapezio CHKD. welche zusammen das △ ECD. ausmachen / Ergo das Parallelogr. ABDC. ist gleich dem △ ECD W. M. Z. W.

3. Wann das Parallelogr. ABDC. nicht geradwinckelicht wäre / so wäre es doch d. n. 379 einem Geradwinckelichtem gleich / welches gleiche Höhe und gleiche Basis hätte / und folglich auch / einem △ der gleiche Basis hätte / und der noch einmahl so hoch wäre.

Auf gleiche Weise wird man beweisen / daß das Parallelogr. ABDC. Fig. 15. dem △ ACE. gleich ist / mit welchem es gleiche Hö-

he AG. hat/ aber dessen Basis CD. nur halb so groß als die Basis CE.

382 IV, Fig. 16. Ein Trapezium ABDC. ist gleich einem Parallelogr. gleicher Höhe GA. dessen Länge CF. ist die Hälffte von AB. + CD. zusammen.

Dann auf die lange Seite CD. nehmet CK gleich AB. theilet den Rest KD. in der Mitte in F. ziehet FE = AC. und verlängert AB. biß daß sie FE. anstosse in E. Alsdann ist es klar 1. Daß CE. ein Parallelogrammum ist. 2. Daß sein Grundstrich CF. aritmetisch mittelmäßig ist/ zwischen die Seiten des Vier-Ecks AB. DC. das ist/ d. n. 105. daß CF. gleich ist der Hälffte einer Linie/ die so lange wäre als AB+CD. 3. Daß dieses Vier Eck ABDC. gleich ist diesem Parallelogr. weil die zwey △ HFD. HEB. einander gleich seynd / d. n. 295. und daß das übrige alles ABHFC. ihnen beyden gemein ist.

383 V. Fig. 17. Eine Circular Fläche ist gleich einem △ dessen Höhe CA. dem Radius gleich ist / und dessen Grundstrich AB. gleich ist dem Umkreiß des Circkels.

Dann wann man den Radius CA. in unendlich kleine und gleiche Theile zertheilet / und daß man durch alle die Theilungs-Puncten aus eben dem Centro C. andere Circkel beschreibet/ und von dar auch mit der Basis AB. = Linien ziehet/ so seynd beyde der Circkel und der △ d. n. 372. in ihre Elementen zertheilet / und werden in glei-

cher

cher Zahl seyn in beyden Figuren/ d. n. 378 weil das Maaß dieser Zahl ist die ⊥ CA. Uber dem/ so wird auch bewiesen/ daß ein jedes Elementum der einē Figur gleich seyn einē jeden Elementum der andern / d. n. 377 und weil also der Circkel und der △ gleiche Zahl gleicher Elementen in sich begreiffen/ so seynd sie einander gleich.

Um aber zu beweisen daß ein jedes Elementum des Circkels als ada. gleich ist einem jeden Elementum ab. des △ welches ihm correspondiret / so betrachte ich nur daß die Linien AB. ab. gleicher Weise gezogen seynd/ in Ansehung ihrer Circkel ADA. und ada. Ergo d. n. 355. so hat dann ab. eine gleiche Verhaltnüß gegen seine Circumferentz ada. als AB. gegen seine Circumferentz ADA. aber AB. ist gleich der Circumferentz ADA. so ist dann auch ab. gleich der Circumferentz ada. und eben das kan man auf die Manier von einem jeden andern Elementum beweisen. Ergo &c.

384 VI. Fig. 18. Ein Sector ACD. ist gleich einem △ CAB. dessen die Höhe AC. der Radius des Circkels ist/ und der Grundstrich AB. gleich dem Bogen AD.

Der Beweiß davon ist eben wie der vorige des Circkels / wann man AC. in unendlich kleine und gleiche Theile zertheilet.

Caput III.

Von dem Maaß des Raums der flachen Figuren.

385 Die Maasse des Raums der flachen Figuren / seynd die Einheiten (unitates) welche ihren Raum gantz bedecken und erfüllen / und solche Einheiten können d. n. 374. seyn Quadraten / oder Rauten / oder Triangel &c.

386 Solche Maaß seynd entweder determinirt umschräncket / oder indeterminirt frey gelassen. Man nennet determinirtes oder umschräncktes Maaß / die Quadrate Einheiten / deren die Seiten eine umschränckete und gewisse Länge haben / als eine Ruthe / eine Toise, ein Schuh / ein Zoll / &c. solche Einheiten dienen die Grösse des Raums einer gewissen Figur nach dem Maaß des Landes wo man ist / zu erkennen / aber alle die andere Arten von Einheiten / als zum Exempel diese / die man in gegenwärtigen Figuren sehen kan / dienen nur die Verhaltnüß des Raums zwoer Figuren gegeneinander zu erkennen.

387 Fig. 19. Man sagt eine flache Figur ABDC, sey gleich dem Product, oder der multiplication der zwo Linien AC. und CD. wann man diese zwo Linien in gleiche Theile zertheilet / und daß es geschicht / daß der Product

duct der Zahlen ihrer Theile miteinander/ eine Zahl gibt / die gleich ist der Zahl der Quadrat Einheiten/oder Rauten Einheiten/ welche die gantze Fläche der Figur zudecken und erfüllen.

Eigenschafften.

I.

Ein Parallelogrammum ist gleich dem Product seiner zwo Seiten AC. CD. Fig. 20. die einen Winckel C. formiren. 388

Gesetzt/ daß AC. und CD. in gleiche Theile zertheilet seynd / und daß man durch die Theilungs-Puncten von AC. der Linie CD. = Linien ziehet/ und durch die Punct von CD. der Linie AC. andere = ziehet/ das Parallelogr. wird zertheilet seyn / in so viel Reyen Einheiten/ als Theile in AC. sich befinden/ und werden in jeder Reyen so viel Einheiten sich befinden als Theile in CD. sich befinden, Ergo, um die Summam dieser Einheiten zu erhalten/ muß man die Zahl der Theile von AC. multipliciren mit der Zahl der Theile von CD. und derowegen ist dann das Parallelogr. gleich dem Product der zwoen Seiten die seinen < formiren.

Notiret/ daß die Seiten dieser Einheiten die Theile der Linien AC. und CD. seynd/ und daß sie gleiche < mit dem parallelogr. haben / also daß wann die = Linien ein- 389

ander ⊥ seynd / so sind diese Einheiten lauter □ / wo nicht / so seynd sie lauter Rauten.

390 II. Fig. 21. Ein Parallelogr. ABDC. ist gleich dem product seines Grundstrichs CD. durch seine perpendicular-Höhe AG.

Fig. 22. Dann d. n. 379. dieses Parallelogr. ist gleich dem Rectangulo abdc. welches gleichen Grundstriche cd hat/und gleiche ⊥ Höhe / das ist / gleich dem Product des Grundstrichs CD. mit seiner ⊥ Höhe AG. Ergo so ist ein Parallelogr. gleich dem product seines Grundstrichs mit seiner ⊥ Höhe.

391 III. Fig. 23. Ein Triangel ACD. ist gleich der Hälffte des Producks einer von seinen Seiten CD. mit der ⊥ die von der gegenüberstehenden Spitze A. auf selbige Seite CD. fället / verlängert wo es nöthig ist.

Dann d. n. 317. der △ ACD ist die Hälffte des Parallelogr. ABDC. welches eben diese Producenten AE. und CD. hätte.

392 IV. Fig. 24. Ein Trapezium ABDC. ist gleich dem product seiner Breite AG. mit der Hälffte von AB + CD.

Dann d. n. 382. das Trapezium ist gleich einem parallelogr. CE. gleicher Breite AG. mit der Länge CF. welche die Hälffte ist von AB + CD.

393 V. Alle Figuren die um den Circkel beschrieben werden / das ist / deren eine jede Seite den Circkel anrühret / seynd gleich der Hälffte des producks ihres gantzen Umkreises mit dem Radius des Circkels FG Fig. 25.

Dann

Dann wann man aus dem Centro F. an allen Winckeln Linien ziehet/ die Figur wird dadurch zertheilet werden / in so viel △ als sie Seiten hat/ und alle solche △ werden den Radius des Circkels für ihre Höhe haben/ nehmlich FG. Nun aber d. n. 391. ist ein jeder solcher △ als AFB. gleich der Hälffte des products seines Grundstrichs AB. mit seiner Höhe FG. Ergo die Summa aller dieser △ wird gleich seyn/ der Hälffte des products aller Grundstrichen dieser △/ welche seynd der gantze Umkreiß der Figur/ mit der Höhe FG. die da ist der Radius des Circkels / und also ist klar / was da solte bewiesen werden.

Es folget aus diesem Beweißstück/ daß alle Regular Viel-Eck der Hälffte des products ihres Umkreises mit ihrem ⊥ Radius gleich seynd / dann alle Regular-Viel-Eck können um einen Circkel beschrieben werden/ dessen Radius wird seyn der ⊥ Radius dieser Figur. 394

VI. Fig 26 Umb die Fläche aller ungereimten Figur bekant zu machen / als da sey A. oder B. muß man sie in lauter △ zertheilen / wie in den Figuren zu sehen; Die Summa der Fläche aller dieser △ wird die Fläche der gantzen Figur seyn 395

VII Fig 27. Ein Circkel ist gleich der Hälffte des products seiner Circumferentz mit seinem Radius. 396

Dann d. n. 383. er ist einem △ gleich der

für

für seinen Grundstrich hat den gantzen Umkreiß / und für seine Höhe den Radius; aber solcher △ ist gleich d n. 391. der Hälffte des products seiner basis mit seiner Höhe / Ergo so ist auch der Circkel gleich der Hälffte des products seiner Circumferentz mit seinem Radius.

Notiret / daß der Radius eines Circkels sich verhält gegen seinen Umkreiß / ungefehr wie 7. gegen 22. oder näher als 113. gegen 355. aber gemächlicher als 100. gegen 314.

397 Fig. 28. Ein Sector ist gleich der Hälffte des products seines Radius CA. mit seinem Bogen AD. Dann d. n. 384. er ist gleich dem △ ABC. welcher AB. gleich dem Bogen AD. für seinen Grundstrich hat / und den Radius für seine Höhe.

Caput IV.

Von der Verhaltnüß der Flachen Figuren gegeneinander / in Ansehung ihres eingeschlossenen Raums.

398 WIr haben im vorigen Capittel gesehen / was für Linien man miteinander multipliciren muß / um die Fläche einer Figur herauszubringen / solche

Linien

Linien wollen wir die producenten der Figuren nennen.

Wann man eine Figur mit einer andern 399
compariren oder vergleichen will/ so müssen die producenten der einen/ einen < machen/ der gleich seye dem </den die producentē der andern Figur miteinander machen/ damit die Einheiten (unitates) der einen/ gleiche Figuren seyen/mit den Einheiten der andern.

Eigenschafften.

I.

Zwo Figuren stehen gegeneinander/ 400
wie der product der producenten der einen/ stehet gegen dem product der producenten der andern.

Fig. 29. Gesetzt/ daß A. und B. die producenten einer Figur seyen/ und daß die Producenten der andern seyen a. und b. Fig. 30. und daß über dem/ alle solche Producenten in gleiche Theile getheilet seyen und gleiche < miteinander machen: so sage ich/ daß die erste Figur zu der andern stehet/ als der Product von A. mit B. gegen dem Product von a. mit b. das ist/ als AB. gegen ab.

Dann wann solche Figuren ▭ seynd/ so ist eine jede ihrem Product gleich/ wie schon zuvor erwiesen. d. n. 388. Wann es Triangels seynd/ oder Circkels/ oder Sectores, so seynd sie gleich der Hälffte ihres Products, und folglich d. n. 66. stehen sie gegen

einander/wie die Producten ihrer Producenten. Endlich/ wann es eine andere Art Figuren seynd/ so können doch solche in Triangels oder in Parallelogr. gebracht werden/ welche/ weil sie gegeneinander stehen / wie die Product ihrer Producenten, so müssen solche Figuren auch gegeneinander stehen / in eben dieser Verhaltnüß.

Euclides Lib. 6 p. 23. beschreibet diesen Vortrag/ wiewohl nicht so universaliter, also. Gleichwinckelichte parallelogramma stehen gegeneinander in vereinigter Verhaltnüß ihrer Correspondenten Seiten. Das aber bedeutet d. n. 79. daß wann A. die Länge des einen wäre / und B. die Breite / a. die Länge des andern und b. die Breite. Die Länge A. hat gegen der Länge a. eine gewisse Verhaltnüß. Und es hat wiederum die Breite B. gegen der Breite b. auch eine gewisse Verhaltnüß. Nun aber d. n. 79. ist die vereinigte Verhaltnüß aus diesen zweyen / die verhaltnüß des Products der zweyen ersten Sätze gegen dem Product der zweyen andern Sätze/ das ist/ die Verhaltnüß des Products AB. der Producenten des einen parallelogrammi, gegen dem product ab der Producenten des andern. Woraus man siehet / daß ob es schon unterschiedene Worte seynd / so ist es doch nur ein Verstand.

401 Woraus folget / daß wir hier zueignen oder appliciren können / alles was wir schon

zuvor

zuvor im ersten Buch gesagt haben / von den Eigenschafften der Ebenmäßigkeiten / und der ebenmäßigen Grössen.

Nehmlich:

I.

Wann Figuren seynd / als A. und B. Fig. 31. welche ihre Producentē einander gleich haben / so seynd sie auch gleich. Das ist klar d. n. 57. und 400. 402

2. Wann Figuren seynd / welche gleiche Producenten haben / und auch ungleiche / so stehen sie gegeneinander d. n. 38. wie die ungleiche. Derowegen dann / wann die Höhen A. und a. Fig. 32. zwoer Figuren einander gleich seynd / so stehen sie gegeneinander als die Grundstriche B. und b: Und wann die Grundstriche B. und. b. fig. 33. einander gleich seynd / so stehen sie gegeneinander wie die Höhen A. und a. 403

3. Wann nach dem n. 234. die Producenten A. und B. Fig. 34. einer Figur / wiederkehrig / (reciproce) proportional seynd denen Producenten a. und b einer andern figur, so seynd solche Figuren einander gleich. d. n. 71. 404

4. Wann drey Linien A, B, C. in gebundener Ebenmäßigkeit stehen / das Rectangulum, das die zwo äuserste A. und C. Fig. 35. für ihre Producentē haben wird / wird gleich seyn dem Quadrat der mittelsten B. Oder es wird der Rauten die mit dieser Linie B gemacht ist / gleich seyn / wofern die Rau- 405

te gleichwinckelicht ist / dem Parallelogrammo. Das ist bewiesen d. n. 72. und 400.

406 V. Fig. 36. Wann die producenten A. und B. einer Figur / proportional seynd denen producenten a. und b. einer andern Figur / so stehet die erste gegen der andern / wie der Quadrat eines producenten A. stehet zu dem Quadrat seines correspondirenden producenten a / oder d. n. 78. Wann man machet ∺ A. a. c. so stehet die erste gegen die andere wie A. stehet zu c.

Dann wann A. a :: B. b. so stehet die erste Figur zu der anderen / d. n. 400 als der product der ersten Sätze A. und B. (welche seynd die producenten der Ersten) gegen dem product der andern Sätze a. und b. (welche seynd die producenten der andern) Aber d. n. 76. der product der ersten Sätze AB. stehet zu dem product der andern Sätze ab wie der Quadrat eines ersten Satzes A. zu dem Quadrat seines andern Satzes a. und d. n. 78. der □AA. □aa :: A. c. Ergo &c. Euclides und andere sagen hier / die erste Figur stehe zu der andern in ratione duplicata der correspondenten Seiten / oder in zwiefacher Verhaltnüß der correspondenten Seiten / welches ein Ding ist / aber unsere Auslegung ist leichter und natürlicher.

407 II. Alle gleichförmige Figuren stehen gegen einander / wie die Quadrat ihrer Correspondenten Seiten / oder wie die □ der Linien / die gleicher Weise darinnen gezogen werden. Dann

Dann 1. Wann solche Figuren gleichförmige parallelogr. oder Triangel seynd/ oder Circkels/ so seyen die producenten A. und B. der einen Fig. die ersten Sätze der zwo Verhaltnüssen einer proportion, und die producenten der andern Fig. a. und b. die anderen Sätze darvon. Ergo d. n. 76. stehen solche Figuren gegeneinander/ als der Quadrat der Seite A. gegen dem Quadrat seiner correspondirenden Seite a. in der anderen Figur / wie in dem bewiesen worden/ oder d n. 355. wie die Quadrate der Linien die auf einerley Weise in diesen Figuren gezogen werden.

2. Wann solche gleichförmige Figuren polygona oder Viel-Eck seynd/ man kan sie in gleichförmige Triangel zertheilen/ deren ein jeder/ durch das vorhergehende/ gegen seinem Correspondenten stehen wird/ als der □ seiner Seiten zu dem □ der correspondirenden Seiten im andern Triangel oder d. n. 355. als die Quadrat der gleicher Weise darinnen gezogenen Linien. Ergo d. n. 62 &c.

3. Wann solche Figuren krumlinicht oder vermischt seynd/ so stehen sie gegeneinander/ wie die Quadrat der gleicher Weise in denselben gezogenen Linien Dann d n 323. man kan solche Figuren betrachten/ als Viel-Ecken von unendlich viel Seiten/ und derowegen/ stehen die Circkel A. und B. Fig. 37. gegeneinander/ als die Quadrat ihrer Diameter.

III, Fig. 38. Wann man auf einer und der-

selben Seite von vielen Linien A,B,C gleichförmige Figuren beschreibet / und auf ihre andere Seiten andere / auch gleichförmige Figuren / die ersten werden gegen einander stehen / wie die anderen gegeneinander.

Dann die ersten d. n. 407 stehen gegeneinander wie die Quadrat der Linien A,B,C. und die andern stehen auch gegeneinander wie die Quadrat derselben / Ergo d. n. 70. so stehen dann die einen gegeneinander / wie die anderen gegeneinander.

IV. Fig. 39. In einem geradwinckelichten
409 Triangel ABC. der Quadrat der hypotenusa AC. ist gleich den Quadraten der zwo andern Seiten zusammen.

Dann wann man von dem geraden Winckel eine ⊥ BD. auf die Hypotenusa fallen läst / so wird der △ ABC. zertheilet in zwey andere Triangel ABD. BDC. die untereinander gleichförmig seynd / weil sie d. n. 349. gleichförmig mit dem ersten ABC. Dañ ein jeder kleiner △ einen rechtē Winckel hat in D. / und noch einen in A. oder in C. der dem grossen Triangel ABC. gemein ist; aber in den zweyen kleinen Triangeln die Hypotenusæ seynd die Seiten AB BC. und AC. ist die Hypotenusa des ersten grossen ABC. Ergo durch den vorigen Vortrag / weil diese drey Seiten die Correspondenten seynd in gleichförmige Figuren / so stehet dann der grosse Triangel gegen die zwey kleine / als der Quadrat der Hypotenusa AC. gegen die

Qua-

Quadraten von AB. u. von BC. Aber der grosse Triangel ist den zweyen kleinen gleich/die seine Theile seynd/ Ergo so ist dann auch der Quadrat auf die Hypotenusa AC. gleich den zweyen □ auf die Seiten AB, BC.

Fig. 40. Hieraus folget/ daß in einem rechtwinckelichtē Triangel die Figur A. auf die Hypotenusa ist gleich den zwoen Figuren B. und C. die ihr gleichförmig/ welche auf seine andere Seiten gemacht seynd/ dann d.n.408. diese Figur A. verhält sich gegen die zwo anderen/ wie der □ der hypotenusa gegen denen □ der zwo andern Seiten/ aber der □ der hypotenusa ist gleich den zweyen andern/ Ergo so ist dann auch die Figur A. gleich den zwoen B. und C. 410

Fig. 41. Wann die Grundstriche dreyer Triangel/ als E. F. G. untereinander in einer gebundenen Ebenmässigkeit stehen/ das ist/ daß ∺ AB. BC. CD. Fig. 41. und daß die zwey äusersten E. und G. gleicher Höhe seynd; Wo der mittelste F. dem ersten E. gleichförmig ist/ so ist er gleich groß mit dem letzten G. und wo er dem letzten G. gleichförmig wäre/ so wäre er mit dem ersten E. gleich groß. Gesetzt nun für das erste/ daß der Triangel F. dem ersten E. gleichförmig ist/ so muß man beweisen/ daß er gleich groß sey dem Triangel G. 411

Beweiß.

D. n. 407. der Triangel E. Triangel F :: □ AB. □ BC. oder d. n. 78. Triangel E. Triangel F :: AB.

AB. CD. Aber auch d. n. 403 Triangel E. Triangel G :: AB. CD. Ergo d. n. 70. Triangel E. Triangel F :: Triangel E. Triangel G. Ergo d. n. 68 der Triangel F > Triangel G. W. Z. B. W. Der andere Casus wird auch also bewiesen.

412 Unter zwoen Regular Figuren/ gleiches Umkreises/ diese ist die gröste/ die am meisten Seiten hat.

Gesetzt es seye ein Quadrat Fig. 43. und ein Fünff-Eck Fig 42 gleiches Umkreises; beschreibet in jeder Figur einen Circkel/ und ziehet die ⊥ Radius AC. und BD. der Circkel in dem Fünff-Eck ist grösser als der Circkel in dem □. Dann wann er gleich mit ihm wäre / so wäre auch d. n 365. der Umkreiß des Fünff-Ecks kleiner als der Umkreiß des □ Ergo so ist der ⊥ Radius BD. des Fünff-Ecks / länger als der ⊥ Radius AC. des □. Aber der □ und das Fünff-Eck d. n. 393. seynd ein jeder gleich dem product ihres halben Umkreises mit ihrem ⊥ Radius, oder der Hälffte des products ihres Umkreises mit ihrem ⊥ Radius, selbige Umkreise aber/ seynd einander gleich / und der ⊥ Radius BD. des Fünff-Ecks ist grösser als der ⊥ Radius A C. des □. Ergo so ist dañ auch der Raum in dẽ Fünff-Eck/ grösser als in dem □/ und folglich / unter allen Regular-Figuren gleiches Umkreises/ seynd diese die grösten / die am meisten Seiten haben.

Hieraus folget / daß unter allen Regular-

lar-Figuren gleiches Umkreises/keine ist/ die so viel Raum in sich hält als der Circkel/ weil man ihn ansehen kan/ als eine Regular-Figur von einer unendlich grossen Zahl Seiten.

VI. Der □ des Diameters eines Circkels stehet zu der Fläche des Circkels; wie der Diameter stehet zu dem Viertel der Circumferentz. 413

Fig. 44. Es seye AB. der Diameter eines Circkels/ dessen □ seye EB. Es seye auch der Triangel CBD. dessen Höhe CB. dem Radius gleich sey/ und die Basis B D. gleich dem Umkreise des Circkels; Es seye G. die Mitte von BD/ und machet das Rectangulum BK. Es seye H. die Mitte von BG, und machet das Rectangulum BL. dessen Höhe ist der gantze Diameter des Circkels. Der Circkel ist gleich d. n. 383. dem Triangel CBD. welcher gleich ist/ d. n. 381. dem Rectangulo BK. gleicher Höhe CB. aber nur mit der halben Basis als BG. und dieses Rectangulum BK ist gleich d. n. 404 dem Rectangulo BL. dessen Höhe doppelt ist der Höhe CB. aber dessen Grundstrich BH. nur die Hälffte ist von BG/ und folglich/ so ist dann der Circkel gleich diesem Rectangulo BL. Aber der □ EB. des Diameters des Circkels/ und das Rectangulum BL. haben nur

eine

eine Höhe AB. Darum d.n.403. stehen sie gegeneinander/als BF. gegen BH. das ist/als der Diameter gegen dem Viertheil des Umkreises. W.Z.B.W.

Ende des vierdten Buchs.

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Oder

Gründe der Erd-meßkunst.

V. Buch.

Von denen/ mit Flächen anstossenden Linien.

IN den vorigen drey Büchern haben wir die Eigenschafften examiniret / der Linien die in einer Fläche gezogen werden / und welche flache Figuren formiren / und die Eigenschafften solcher Figuren; in den drey folgenden / wollen wir betrachten / die Linien und die Flächen / welche auf andere Flächen erhoben werden / und welche auch dichte Figuren / oder Cörper formiren / und die Eigenschafften solcher dichten Figuren.

Caput I.

Von der Fläche und geraden Linie ins gemein.

414 Wir nennen Planum, eine solche Fläche/ die überall/ und gegen alle Seiten/ weder tieff noch erhoben/ sondern überall eben ist/ und die man sich ungeendet muß einbilden/ aber wir nennen eine flache Figur/ solche Fläche/ die um und um geschlossen und eingeschräncket ist.

Eigenschafften.

415 Die überall-Gleichförmigkeit und uniformitas der geraden Linie und der ebenen Fläche gibt uns ohne andern Beweiß folgende Eigenschafftē zu verstehen.

416 I. Auf einer ebenen Fläche kan man allerley Art gerade Linien oder auch krumme Linien ziehen/ wofern sie nur nichts von der Natur des tirebour, oder Krätzers an sich haben Fig. 1.

417 II. Wann eine gerade Linie zwey ihrer Puncten in einer gewissen Fläche hat / so wird sie gantz und gar in dieser Fläche liegen. Fig. 2.

418 III. Fig. 3. Man kan durch zwey gegebene puncten A, B. oder durch eine gegebene Linie AB. eine unendliche Zahl ebener Flächen pasßi-

pasſiren oder durchgehen laſſen / aber durch eine gegebene Linie AB. und durch einen Punct C. auſſer der Linie / kan man nur eine ebene Fläche paßiren laſſen / oder auch / (welches eins iſt) durch drey gegebene Puncten A,B,C. kan man nur eine ebene Fläche pasſiren laſſen / wann nemlich ſelbige Puncten nicht in gerader Linie ſtehen.

Woraus folget erſtlich / daß die Stellung einer ebenen Fläche dependiret / oder folget / aus der Stellung einer geraden Linie / und eines Puncts auſſer derſelben / oder kürtzer / aus der Stellung dreyer Puncten / die nicht in gerader Linien geſetzt werden. 419

2. Fig. 3. Der gemeine Schnitt AB. zwoer ebenen Fläche iſt eine gerade Linie. 420

IV. Fig. 4 Wann man aus dem Punct C. auf die gerade Linie AB. lauter gerade Linien ziehet / ſolche Linien werden alle in einer ebenen Fläche ſeyn / nemlich die / welche durch die Linie AB. und durch den Punct C. fahret. 421

Woraus folget / daß zwo Linien die einander durchſchneiden / nothwendig alle beyde in einer ebenen Fläche liegen / und daß auch alle die Seiten eines △ in einer ebenen Fläche liegen. 422

V. Fig. 5. Zwo ═ Linien AB, CD. ſeynd in einer Ebenen Fläche. 423

Dann wann man ſich eine Fläche einbildet / die durch AB. fähret / und durch C.

alsdann ist es klar / daß diese Fläche auch durch die gantze Linie CD. fahren wird; sonsten/wann solche Linie CD. einen Punct C. in dieser Fläche hätte/ und alle ihre andere Puncten ausser derselben / so würde sie sich je mehr und mehr von dieser Fläche unendlich entfernen / und darum auch von der Linie AB. die in selbiger Fläche lieget. Ergo so wäre sie dann / mit AB. nicht = / welches lauffet wider unsern ersten Satz. Ergo &c.

424 VI. Wann zwey Puncten A. und B. Fig. 6. einer geraden Linie/ also gestellet seynd / daß der Punct A. gleich entfernet seye von zwey Puncten E. und F. einer andern geraden Linie / und daß auch der Punct B. gleich entfernet seye von E. und von F. alle die andere Puncten der Linie AB. als hier G. seynd auch/ ein jeder/ gleich entfernet von E. und von F. es mag auch diese EF. in der Fläche der vorigen AB. liegen/oder auf eine Fläche / worauf AB. ⊥ stehet / oder wo sie will.

Dann ziehet die Linien AF. BF. GF. und AE. BE. GE. Alsdann wird der Triangel ABF. gleich und gleichförmig seyn/ mit dem Triangel ACB. weil die drey Seiten des einen respectivè gleich seynd den dreyen Seiten des andern; Weil aber die zwo Linien GF. GE. gleicher Weise von ihren Spitzen E. und F. auf ihren gemeinen Grundstrich AB. (verlängert oder nicht/) gezogen

seynd/ so seynd die auch einander gleich d. n. 355. Und folglich/so ist dann der Punct G. auch gleich entfernet von E. und von F. dieser Punct G. aber/ist nach belieben auf die Linie AB. genommen worden/ Ergo wann zwey Punct A. und B &c.

VII. Wann eine Linie AB. Fig. 7. zwey 425
ihrer Puncten hat als A. und B. die also gestellet seynd/ daß A. gleich entfernet ist von den dreyen Puncten D. E. F. einer gewissen Fläche; und daß B auch gleich entfernet ist von eben diesen dreyen Puncten D. E. F. solche Linie AB. hat alle ihre andere Puncten auch geich entfernet von eben diesen dreyen Puncten D.E.F. Das folget aus vorigem Beweiß/wann man nur die drey Puncten der Fläche D. E. F. zwey und zwey nach Belieben betrachtet in Gegenhaltung der zweyen A. und B.

Woraus folget 1. daß solche Linie AB. Fig. 8. durch das Centrum C. eines Circkels fahren muß/ dessen Umkreiß durch die drey Puncten D. E. F. fahren wird.

2. Daß alle die Puncten die gleich entfernet seyn können/ von diesen drey Puncten D. E. F. sich alle in der Linie AB. befinden müssen.

Fig. 9. Wann drey puncten A. B. C. ei- 426
ner gewissen Fläche/ welche nicht in gerader Linie stehen/ ein jeder gleich entfernet stehen von den zweyen puncten E. und F. die ausser dieser Fläche stehen/ der eine auf

einer

einer Seite der Fläche / der andere auf die andere Seite / so ist ein jeder Punct von solcher Fläche als G, eben so weit gelegen von E. als von F. Dann ziehet die gerade Linien AB. AC. Man siehet gleich d. n. 424. daß weil die Linie AB. zwey ihrer puncten A. und B. gleich entfernet hat von E. und F. alle ihre andere Puncten / werden auch davon gleich entfernet stehen; Eben das wird man mercken / von allen den Puncten der Linie AC: zum andern / durch G. ziehet eine Linie welche die zwo vorige AB. AC. durchschneide in H und K. solche Linie wird die zwey puncten H. und K. gleich entfernet haben von E. und von F. Ergo, wieder d. n. 424. alle ihre andere Puncten werden dann auch von denselben gleich entfernet stehen / und darum dann auch / weil der Punct G. nach belieben auf solche Fläche genommen worden ist / so ist das auch wahr von allen andern Pnncten dieser Fläche. W. Z. B. W

Caput II.

Von den Linien die auf eine Fläche Perpendicular oder schieff gezogen werden.

Benen-

Benennung oder Beschreibung.

Eine Linie AB. Fig. 10. ist ⊥ auf einer Fläche/wann sie sich nicht mehr auf einer Seiten als auf die andere neiget / oder wann sie ⊥ ist auf allen den Linien die auf dieser Fläche durch ihren Fuß C. gezogen werden. 427

Eine Linie EF. Fig. 11. ist schieff auf einer Fläche / wann sie sich mehr auf einer Seiten neiget als auf die andere. 428

Wann man von dem punct E. der schieffen EF. auf die Fläche die ⊥ ED. fallen lässet / in welcher Fläche man auch die Linie FD ziehet / welche die ⊥ und die schieffe zusammen bindet / solche Linie FD. wird die projectio obliquæ, oder / der Ausfall der Schieffen genannt.

Eigenschafften.

Die Eigenschafften der Linien die auf einer Fläche ⊥ und schieff seynd / seynd ungefehr eben dieselbe / als von denen Linien / die ⊥ und schieff seynd auf einer gerade Linie.

I. Wann eine Linie AB. Fig. 12. auf einer Fläche ⊥ ist / so machet sie gerade ∠ mit allen den Linien die auf diese Fläche durch den Fuß C. derselben Linie gezogen werden. 429

II. Wann ein punct A. Fig. 12. der ⊥ AB. gleich entfernet stehet von zweyen puncten in der Fläche als E, F. so seynd alle ihre andere 430

puncte auch gleich entfernet von denselben zwey puncten E und F.

Dann wann man auf diese Fläche ziehet die Linien CE. CF. die Linie AC. wird auf alle beyde ⊥ stehen d. n. 429. und weil die hypotenusæ AE. AF. einander gleich seynd und daß die ⊥ AC. dienet für alle beyde △. so müssen d. n. 183. die entfernungen CE. CF. der ⊥ von diesen puncten auch einander gleich seyn. Ergo so seynd dann A. und C. der ⊥ von denen zwey puncten E. und F. gleich entfernet / und folglich d. n. 424. alle die puncten der ⊥ AC. stehen gleich entfernet von selbigen zwey puncten E und F.

431 Hieraus folget 1°. daß wann ein punct der ⊥ A. Fig. 13. gleich entfernet stehet von drey in der Fläche genommenen puncten D. E. F. alle die puncten dieser ⊥ werden gleich entfernet stehen von solchen drey puncten. 2°. daß alle die puncten des Umkreises eines Circkels / der durch diese drey puncte fahret / alle gleich entfernet stehen von selbigem punct. 3°. daß es eben so gehē wird / mit denen Umkreisen aller Circkel die nur ein Centrum mit dem Ersten haben werden. 4°. Endlich / daß die ⊥ von solchem punct A. auf diese Fläche / durch das gemeine Centrum dieser Circkel C. fahren wird.

432 III. Wañ man von einem punct A Fig. 14. ausser einer Flächē / eine ⊥ AB. auf solche fallen lässet / und viele schieffe AD. AE. AF. die ⊥ AB. wird die allerkürtzeste seyn; die am meisten ent-

entfernet / AD. ist auch die allerlängste: und die zwo gleich entfernete AE. AF. seynd auch einander gleich. Das alles ist schon im andern Buch bewiesen worden d. n. 178.

Woraus folget / daß man aus einem einigen punct, nur eine einige ⊥ auf einer Fläche ziehen kan. Und daß alle schieffe / die von diesem punct kommen / und die einander gleich seynd / alle mit einander / in dem Umkreiß eines Circkels fallen. 433

IV. Wann eine Linie AC. Fig. 15. auf einer Flächen schieff fällt / so machet sie ungleiche ∠. mit denen Linien / welche sie in dieser Fläche anstosset oder schneidet / worauf man einige Anmerckungen machen muß. 1°. Die schieffe AC. machet mit einer jeden Linie der Fläche zwey ∠. darvon ein jeder das supplementum ist des andern / welches von ihm selber clar ist. 2°. der scharffe ∠ACB. den sie mit ihrem Ausfall (projectione) CB. macht / ist der kleineste unter allen. 3°. Sie machet gerade ∠. mit der Linie EF. welche auf ihrem Ausfall (project:) CB ⊥. ist. 434

Dann wann man aus C. als Centrum, und mit dem Radius CB. einen Circkel beschreibet / der die Linien die aus dem Centro kommen / schneidet in den puncten G. E F. und daß man die schieffe AG. AE. AF ziehet / die △ACB. und ACG. haben die Seite AC. gemein / und CB. CG. einander gleich / aber d. n. 432. die ⊥ AB. ist kürtzer als die schieffe AG. Ergo d. n. 298. so ist der ∠ACB. der mit der schief-

ſen AC. und ihrem Ausfall CB. gemacht wird/der kleineſte unter allē. Ferner 30.EF.iſt auf dem Ausfall CB. ⊥ und die zwey puncten E. und F. ſind gleich entfernet von C. darum ſeynd ſie auch d.n. 176. gleich entfernet von B. der ⊥ BC.und ebē darum auch gleich entfernet von A. weil AB. ⊥ iſt auf BC. Ergo d. n. 177. weil A. und C. gleich entfernet ſeynd / von E. und F. ſo iſt die Linie AC.⊥ auf EF. und machet mit derſelben gerade Winckels.

435 Woraus folget / daß der ∠ ACB. einer ſchieffen AC.mit ihrem Ausfall CB.das rechte Maaß iſt ihrer Schieffe / oder inclination auf dieſer Fläche.

436 V. Wann man von einem punct A. Fig. 16. auſſer einer Fläche eine ⊥ AB. und viele ſchieffen/ AC. AE. AF. fallen läſſet; die näheſte AC.an der ⊥ AB.wird am wenigſten ſchief ſeyn / und die gleich entfernete AE. AF. von der ⊥ werden gleich ſchieff ſeyn; Welches alles klar iſt durch das vorhergehende.

437 Was wir geſagt haben von den Linien die durch der Oberſpitze A. einer ⊥ AB. gezogen werden / muß auch verſtanden werden / von den Linien / die von denen Oberſpitzen A. und a. Fig. 16. und 17. zwoer gleichen ⊥ AB und ab gezogen worden.

348 VI. Es folget aus vorhergehendem Beweißſtück / daß die wahre Zeichen/woran man erkennen kan/ob eine Linie auf einer ebenen Fläche ⊥ ſtehet/folgende ſeynd 1°. Wann ſie die kürtzeſte/oder die am wenigſten ſchieff iſt/

von

von allen denen / die man aus einem ihrer puncten auf diese Fläche ziehen kan. 2°. wann sie zwey ihrer puncten gleich entfernet hat / von drey puncten dieser Fläche / oder wann drey puncte dieser Fläche / die nicht in gerader Linie stehen / ein jeder gleich entfernet seynd / von zwey puncten dieser Linie

3°. Wann sie auf zwoen Linien die sich in dieser Fläche schneiden / nehmlich auf ihrem Creutz-punct ⊥ stehet.

Caput III.

Von den Flächen die einander durchschneiden.

439

I. Wann man auf einem punct C. Fig. 18. des gemeinen Schnitts der zwo Flächen X. und Y. zwo ⊥ Linien ziehet auf selbigen gemeinen Schnitt / die eine CD. in der Fläche X. und die andere CE. in der Fläche Y. diese zwo ⊥ werden mit einander den ∠ECD. formiren / grössero der kleiner / nachdem diese zwo Flächen mehr oder weniger gegen einander schieff seyn werden. 440

Dieser ∠. ist es nun / d. n. 435 der das rechte Maaß ist der Schieffe solcher zwoen Flächen / also daß wann dieser ∠. von 60. gradus wäre / so würde man sagen / daß die Schieffe dieser zwo Flächen gegen einander /

wäre von 60. gradus und wann diese zwo Linien auf einander ⊥ wären / so würde man sagen / daß diese Flächen auch auf einander perpendicular wären.

441 II. Wann eine Linie EC. Fig. 19 auf der Fläche X. ⊥ stehet / so stehet auch die Fläche Y. die durch diese Linie EC. fahret / ⊥ auf die Fläche X. dann d. n. 429. solche Linie EC. wird auf ihrem gemeinen Schnitt ⊥ seyn / und auf alle andere Linien als CD. die sie in der Fläche X. anstossen wird. Ergo d. n. 440. weil der ∠ECD. recht ist / so ist die Fläche Y. ⊥ auf X.

442 III. Fig. 20. Wañ zwo Flächen als Y. und Z. auf eine dritte X. ⊥ stehen / so ist auch ihr gemeiner Schnitt CE. auf derselbē Fläche X. ⊥.

Dann / wann man von dem punct E. in dem gemeinen Schnitt genommen / auf die Fläche X. eine ⊥ fallen läst / nehmlich EC. selbige EC wird in der Fläche Y sich befinden / die der Fläche X. ⊥ ist; eben darum wird sie dann der gemeine Schnitt dieser zwo Flächen seyn.

443 Woraus folget / daß die zwo Flächen Y. und Z. werden auf X. den ∠DCA. formiren / der da ist das Maaß ihrer Schieffe gegen einander.

Caput IV.

Von den Linien und Flächen die mit einer andern Fläche parallel seynd.

Eine

EIne Linie AB. Fig. 21. oder eine Flä- 444
che Y. Fig. 22 seynd mit einer andern Fläche X. parallel, wann alle ihre puncten von selbiger Fläche X. gleich entfernet stehen. Das ist / wann alle die ⊥ die von der Linie AB oder von der Fläche Y. auf die Fläche X. herunter fallen / einander gleich seynd.

Eigenschafften.

EIne Linie / oder eine Fläche / die mit ei- 445
ner andern Fläche parallel laufen / werden einander nicht anstossen / wann sie gleich unendlich verlängert werden.

Woraus folget 1°. das wann eine Fläche Z. Fig. 23. zwo parallele Flächen X. und Y. durchschneidet / ihre gemeine Schnitt AB. CD. werden zwo ═ Linien seyn. 2°. daß wann eine Linie AB. Fig. 24. mit einer andern Linie CD die in der Fläche X. lieget ═ ist / so wird sie mit dieser Fläche X. auch ═ seyn. Dann wann sie auf einer ihrer Seiten selbige Fläche anstossen solte / so würde sie sich auf der andern Seite / von derselben Linie CD. unendlich entfernen / welcher sie doch ═ gesetzt oder præsupponiret wird.

II. Fig. 25. Wann zwo Flächen X. und Y. 446
mit einander ═ lauffen / und daß die Linie AB. ⊥ auf X. stehet / so ist sie auch ⊥ auf Y. Dann / wann man sich eine dritte Fläche Z. ein-

einbildet / welche durch AB fahret / die gemeine Schnitt AC. BD. mit denen zwo Flächen/X. u. Y. seynd einander $=$ d. n. 445. u. machen also ein parallelogr: und darum/weil AB. $\perp$ ist auf AC. so ist sie auch d. n. 201. $\perp$ auf BD. und wann man durch AB. eine Fläche fahren läst / so wird sie wiederum mit ihren gemeinen Schnitt AE. BF. $\perp$ stehen. Ergo d. n. 438. wann AB. auf X. $\perp$ stehet/so ist sie auch $\perp$ auf Y.

447 Woraus folget/daß wann eine Fläche Z. Fig. 26. auf einer von zwoen $=$ Flächen / als X. $\perp$ stehet / so ist sie auch $\perp$ auf der andern $=$ Fläche Y.

448 III. Wann man eine Linie AB. Fig. 27. ziehet / welche die zwo $=$ Flächen X. und Y. nicht $\perp$ schneidet / so wird sie auf jede Fläche gleich schieff seyn.

Dann/wann man durch AB. eine Fläche Z. fahren läst / welche auf beyde Flächen X. und Y. $\perp$ seye / die gemeine Schnitt AC. BD. werden einander $=$ seyn / und die umwechselende $<$A. und B. die das Maaß der Schieffe von AB. seynd/auf die zwo Flächen X. und Y. seynd einander gleich d. n. 199. Ergo &c.

449 IV. Wann zwo $=$ Linien AB. CD. Fig. 28. auf eine Fläche X. fallen / so werden sie auf solche Fläche gleich schieff seyn.

Dann machet die zwo Linien AB. CD. einander gleich / und ziehet die zwo Linien AC. BD.

BD. und machet auch die zwo Linien AF. CG. ⊥ auf die Fläche X. ziehet auch ihre Ausfälle BF. DG. weil nun die zwo AB. CD. gleich und = seynd / so ist AC. aus der Fläche X. auch = mit BD. in derselben Fläche. Ergo so ist dann AC. der Fläche X. auch = / wie man es gleich beweisen könte durch n. 292. wann man eine Zwerch-Linie AD. ziehet / und folglich d. n. 444. so seynd auch die ⊥ AF. CG. einander gleich. Aber wann die ⊥ und die schieffe gleich seynd / so seynd dann solche Schieffe AB. CD. d. n. 183. oder dessen umgekehrte / auf die Fläche X. gleich schieff. Ergo &c.

Woraus folget / daß wann unter zwo 450
= Linien die eine ist ⊥ auf eine Fläche / so ist die andere auch auf dieselbe Fläche ⊥.

V. Fig. 29. Wann eine Fläche Z. zwo 451
= Flächen durchschneidet als X. und Y. so wird die Erste Z. auf alle beyde gleich schief seyn.

Dann wann man sich eine neue Fläche V. einbildet / die auf dem gemeinen Schnitt AB. ⊥ seye / die wird die drey Flächen X. Y. und Z. schneiden in den Linien AE. CF. AC. weil nun die Flächen / X. und Y. parallel seynd / die Schnitte der Fläche / Z als AB. CD. werden auch = seyn / wie auch die Schnitte der Fläche V. AE. CF. und darum dann / weil durch die Bewerckstellung AB. ⊥ ist auf die Fläche V. so ist es CD. eben deßgleichen /

und auch die <EAC. FCA werden das Maaß seyn der Schieffe der Fläche Z. auf die zwo X. uñ Y. d n. 440. sie seynd aber umwechselend / und d. n. 199. die umwechselende <. zwischen zwo ═ seynd gleich / Ergo so ist / die Fläche Z gleich schieff auf die zwo Flächen X. und Y.

452 VI. Fig. 30. Wann zwo Linien CD. EF. einer dritten AB. ═ seynd / so seynd sie auch untereinander parallel.

Dann wann man einer derselben eine ⊥ Fläche X. ziehet / so wird diese Fläche d n 450. auf die zwo andere Linien auch ⊥ stehen / und darum d. n 450. umgekehret / müssen sie alle drey parallel seyn.

453 VII. Fig. 31. Wann zwo Seiten AB. BC. eines <. in einer Fläche Y. zwoen Seiten DE. EF. eines andern <. in einer andern Fläche X ═ sind / so seynd diese zwey <. ABCDEF. einander gleich.

Dann ziehet BH. ⊥ auf die Fläche X. des <DEF / und lasset eine Fläche Z. fahren / durch die zwo Linien BC. BH. und noch eine andere Fläche V. durch die zwo Linien AB. BH. diese zwo Flächen / werden die Fläche X. schneiden in HI. und HG. weil BH. ⊥ auf die Fläche X. stehet / so ist sie auch ⊥ auf die Fläche Y. d. n. 446. die derselben parallel ist / und die zwey <ABC. GHI welche die Neigung oder Schieffe der zwo Flächen Z. und V. formiren und anzeigen d. 440. seynd einander gleich / wie es natürlich klar ist / aber die Linien

nien GH. HI. die den zwoen AB. BC. ═══ seynd / müssen auch parallel seyn / d. n. 452. denen Linien DE. EF. Ergo weil der <GHI. gleich ist dem <DEF. d n. 200. wie auch dem <ABC. wie schon gesagt / so muß der <DEF. gleich seyn dem <ABC. wie es natürlich klar.

VIII. Fig. 32 Wann man zwischen zwo parallele Flächen viele Linien ziehet / die ⊥ AB. wird die kürtzeste seyn / die schieffeste GH. wird die längste seyn / und die gleich schieffe CD. EF seynd einander gleich / das wird bewiesen wie n. 191. 454

IX Fig 33. Wann drey parallele Flächen X. Y. Z. zwo Linien AB CD. durchschneiden / so werden sie auch ebenmäßig schneiden. 455

Dann wann man von A. ziehet die Linie AE. ═══ der Linie CD. so wird sie derselben gleich seyn / d. n. 203 und folglich die Schnitte dieser Flächen BE, GH. werden einander ═══ seyn / Ergo so werden sie die Linien AB. AF. ebenmäßiglich schneiden / d. n. 241. aber die Theile AH HE. seynd den Theilen CL. LD. gleich d n 203. Ergo die Linien AB. CD. seynd auch proportionirlich geschnitten.

Woraus folget / daß wann viele Linien AB. AE. die einen punct A. gemein haben / durch zwo parallele Flächen geschnitten werden / als Y. und X. so werden sie auch proportionirlich geschnitten. 456

X. So seynd dann die Kennzeichen / ob zwo Flächen einander parallel sind folgende. 457

1°. Wann drey puncte der einen/ die nicht in gerader Linie stehen/ gleich entfernet seynd von der andern.

2°. Wann eine Linie oder eine Fläche/ diesen zwoen Flächen ⊥ ist.

3°. Wann eine Fläche dieselbige beyde durchschneidet / und gleiche umwechselende <. auf dieselbige beyde machet.

4°. Wann zwey oder mehr Linien/ die einen punct gemein haben/ durch selbige zwo Flächen proportionirlich geschnitten werden.

Caput V.

Von denen dichten Winckeln/ oder angulis Solidis.

458 Man nennet Flacher Winckel / den <, der durch zwo Linien auf eine Fläche formiret ist / als ABC. Fig. 35.

459 Man nennet Neigung oder Schieffe der Flächen / den <DEF. welchen die zwo Flächen X. und Y. mit einander formiren. Fig 36.

460 Endlich / nennet man dichter Winckel/ die Oeffnung A. Fig. 37. die mit mehr als zwo Flächen gemacht wird/ und die eine erhobene Spitze machen ; also bestehet dann ein dichter Winckel / aus vielen Flachen Winckeln und Neigungen der Flächen / welche Nei-

Neigungen sich können erheben und buckelicht werden/ oder niedersincken und eine Höhlung formiren.

Eigenschafften.

MAnn man nichts betrachtet/ als die Flache <. die einen dichten <. formiren/ so kan man sie anschauen/ als formiret/ durch mehr als zwo gerade Linien/ die einen punct gemein haben/ und die nicht in einer einigen Fläche gezogen seynd. 461

Fig. 38. Wañ man von der Spitze des dichten <. A. lauter Circkelbogen auf jede Fläche die ihn formiren ziehet/ solche Bogen seynd die Maaß eines jeden flachen Winckels/ und hierauf ist folgende Wahrheit wohl zu mercken.

II. Fig. 39. Alle die flache Winckel/ die einen dichten Winckel A. formiren/ zusammen genommen/ seynd kleiner als vier gerade Winckels/ es mögen die Neigungen der Flächen erhoben seyn/ daß sie lauter Buckels formiren/ oder eine Höhlung machen. 462

Dann/ schneidet ein Stück ab von diesem Cörper unter dem dichten <. selbiger Schnitt wird eine geradlinige Grundfläche formiren/ als BCDEF. die so viel Seiten haben wird/ als < oder △ seynd die den dichten < A formiren. In dieser Grundfläche nehmet einen punct G. aus welchem ziehet Linien auf alle

<. so wird die Grundfläche in so viel △ zertheilet seyn / als deren seynd / die den dichten < A. formiren/alle die < solcher △ die in G. sich befinden / seynd vier geraden < gleich d. n 168. so stehet dann nur zu beweisen / daß daß die < in A. zusammen genommen/kleiner seynd / als die < in B. zusammen genommen. Um das zu thun / wollen wir setzen daß sich die Spitze G. des △ BGC. auf seinen Grundstrich BC erhoben habe biß daß der punct G. in die Fläche des △ ABC. sich befunden und ziehet AG. biß in I. alsdann betrachtet die zwey △ AGB. AGC. deren AG. verlängert ist in I. d. n. 278. der < IGC. ist grösser als der < IAC. Eben d. n. 278. ist der auch < IGB. grösser als der < IAB. Ergo der gantze BGC. ist grösser als der gantze BAC. Und eben also wird man beweisen / daß CGD grösser ist als CAD. DGE. grösser als DAE. EGF. grösser als EAF. und FGB. grösser als FAB, und also/weil alle die < in G. 4. geraden < gleich seynd/so seynd alle die < in A. kleiner als 4. gerade </welches zu beweisen war.

Weil ich mir durch meinen vorigen neuen Beweiß einen Vortrag oder propositio. des Euclidis habe unnöhtig und unnütz gemacht / nehmlich die 20te des 11ten Buchs/ so will ich an statt dieser / die 3te des 6ten Buchs hieher setzen / die öffters kan gebraucht werden / und die uns biß hieher nicht vorgekommen ist/nehmlich.

Wann

Fig. 40. Wann der < ABD. durch die Linie BC. in zwey gleiche Theile getheilet ist / so stehen die Stücke des Grundstrichs / nehmlich AC. und CD. gegen einander / wie die zwo Seiten AB. und BD. und hingegen / wo sich diese Ebenmäßigkeit durch den Schnitt der Linie BC. befindet / da ist der < ABD. in zwey gleiche Theile getheilet. 463

Machet in der Verlängerung der Linie AB. die Linie BE ∞ BD. und ziehet die Linie ED.

Weil man setzet daß BE ∞ BD. so ist d. n. 286 der < BED ∞ dem < BDE. und d. n. 278. so ist der < BDE ∞ dem halben < ABD. das ist / gleich dem < CBD. Ergo d. n. 205. BC = DE darum dann / d. n. 240. AB. BE. (BD) :: AC. CD. W. Z. B. W.

Und wann man setzet / daß AB. BD. (BE.) :: AC. CD. so ist durch die umgekehrte des n. 240. BC = DE. Ergo d. n. 200. der < ABC ∞ dem < E. und CBD ∞ BDE. d. n. 199. Ergo d. ax. 3. der < ABC ∞ CBD. und also ist dann der < ABD. in zwey gleiche Theile getheilet. W. Z. B. W.

Ende des fünfften Buchs.

(o)

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Oder

Gründe der Erd-meßkunst.

VI. Buch.

Caput I.

Von denen Cörpern insgemein.

464 MAn nennet dichte Figur ein Cörper der mit einer oder mit vielen Flächen umgeben und beschlossen ist.

465 Die Flächen die einen Cörper einschliessen / können entweder eben / oder krum / oder endlich beydes zugleich seyn.

466 Die flache Figuren / die einen Cörper umschräncken / formiren durch ihre gemeine Schnitte / geradlinige Figuren / Neigungen der Flächen / und dichte Winckel.

Wann

Wann ein Cörper mit Flächen und ebenen Figuren / die einander gleich und gleichförmig seynd / umschräncket ist / so wird er ein Regular-Cörper genennet als Fig. 1. 467

Um zu wissen / wieviel Regulare Cörper seyn können / so muß man betrachten auf wie vielerley Art man gleichseitige △, oder Quadrate / oder Regular Viel-Eck bey einander fügen kan / um dichte Winckel damit zu formiren. Und dardurch wird man mercken / daß nur fünferley Art Regular-Cörper seyn können / nemlich ein Tetraëdrum mit 4. gleichseitigen △ umschräncket / als Figur 2. Ein Octaëdrum als Fig. 3 mit 8. solche △. Ein Icosaëdrum mit 20 solche △ als Fig. 4. Ein Exaëdrum oder Cubus Fig. 5. mit 6 Quadrat umschräncket. Und endlich ein Dodecaëdrum mit 12. Regular Fünfeck umschräncket als Fig. 6. 468

Unter den andern Cörpern die mit ebenen Flächen umschräncket seynd / betrachtet man 1°. die Pyramides, oder Eckkegel / die mit lauter △ umfasset seynd / die alle in einem punct sich vereinigen als O. und deren Grundfläche eine ebene flache Figur formiren als ABCDE. Fig. 7. oder ABC. Fig 8. 469

2°. Die Prismata oder Ecksculen die mit Parallelogramma umfasset seynd / und deren die gegenüberstehende Grundfläche ABCDE. abcde. Fig. 9. oder ABC. und abc. Fig. 10. seynd ebene / einander gleich und gleichförmige Flächen. 470

471 3°. Alle andere dichte Figuren / ja auch die Irregulare / werden zu diesen beyden gebracht und reduciret.

472 Unter den Cörpern die mit krumme Flächen umfasset und beschlossen seynd / ist nur die Kugel allein Regular Fig. II.

Alle die puncten ihrer Ober-Fläche seynd gleich entfernet von ihrem Mittel-punct welches ihr Centrum genennet wird / als C.

473 Unter allen andern Cörpern die mit ebene und krumme Flächen umschräncket seynd / betrachtet man hier in der gemeinen Geometrie nur diese / die durch die gerade oder Circular-Linien formiret werden /

474 1°. Der Conus oder Kegel / der einen Circkel für seine basis hat / als AB. Fig. 12. und dessen die Seiten sich in einer Spitze O. vereinigen / wie bey der Pyramis.

475 2°. Der Cylindrus oder Wulst / hat zwey Circkel AB. und ab. Fig. 13. für seine Grundflächē die einander gleich und parallel seynd / und die Seiten mit lauter gerade Linien umfasset / wie bey dem Prisma.

476 3°. Alle andere dichte Figuren die mit ebene und krumme Flächen beschlossen seynd / werden zu diesen gebracht oder reduciret.

477 Wann man zwey Cörper mit einander vergleichet als A. und B. so saget man der eine sey dem andern gleich / wann so viel materia, Soliditas, oder Dichtigkeit in dem einen / als in dem andern ist. Fig. 14.

Zwey

Zwey Cörper als A. und B. Fig. 15. seynd einander gleichförmig / wann sie mit gleicher Zahl gleichförmiger Flächen beschlossen seynd / das ist / wann die Linien die den einen umfassen / gleiche < machen mit den Linien / die den andern umfassen / und daß selbige Linien gegen einander ebenmäßig seynd. 478

Caput II.

Von der Ober-Fläche der Kugel.

Bildet euch ein einen halben Umkreiß ABD. Fig. 16. eines Circkels / welcher sich herum drehet um seinen Diameter AB. als um einen Axt am Wagen / solche halbe circumferentz / wird durch diese ihre Bewegung / die Ober-Fläche einer Kugel beschreiben / und der Raum der in selbiger Fläche begriffen ist / heisset Kugel oder sphæra, die Mitte C. des Diameters AB. ist das Centrum der Kugel. 479

Die gerade Linien CD. CE. CA. seynd die Radius oder halbe Diameter der Kugel.

Die gerade Linien AB. DE. die durch

das Centrum fahren/ seynd die Diameter der Kugel.

Der Diameter AB. um welchen man den Circkel gedrehet / heisst der Axt/Axis.

Die zwey Enden A. und B. des Axts seynd die Poli der Kugel.

Eigenschafften.

480 DJe überall-Gleichförmigkeit der Kugel / gleich wie des Cirkels / gibt ohne andern Beweiß / folgende Eigenschafften zu verstehen.

481 I. Ihre Radii seynd einander gleich/eben so wohl als ihre Diameters.

482 II. Wann wir die Kugel formiret haben / durch die Umdrehung des halben Circkels / und haben die puncten AB. Fig. 16. für die Enden des Diameters darzu gebrauchet / so hätten wir auch / die zwey Enden a. b. eines jeglichen andern Diameters / als Polos nehmen kōñen/um selbige Kugel zu formiren / weil sie überall gleichförmig ist / derowegen kan man einen jeden Diameter als ab. zu dem Axt nehmen und gebrauchen.

483 III. Wann eine Fläche eine Kugel durchschneidet / der gemeine Schnitt ist ein Circkel.

Dann 1°, wann der Schnitt durch das Centrum gehet/ so ist es klar / daß dieser Schnitt ein Circkel ist / der ein einiges

Cen-

Centrum hat mit der Kugel als DF. Fig. 17.
2°. wann der Schnitt nicht durch das Centrum gehet / so ziehet vom Centro C. Fig. 18. auf die Fläche des Schnitts die ⊥ CB. und viele schieffe am Rand als CD. CE. CF. solche schieffe werden einander gleich seyn / weil sie Radii der Kugel seynd / und darum dann d. n. 183. werden sie von der ⊥CB gleich entfernet stehen / Ergo so seynd dann die puncten D. E. F. &c. in der circumferentz eines Circkels d. n. 129.

Notiret / daß wann man redet von einem Circkel der Kugel / man dadurch verstehet einen solchen Circkel / dessen Umkreiß lieget auf die Ober-Fläche der Kugel.

IV. Wann die Fläche zweyer Circkel 484 durch das Centrum der Kugel fahren / ihr gemeiner Schnitt AB. Fig. 19. wird aller beyden Diameter seyn / und werden sich beyde in zwey gleiche Theile theilen.

V. Die Manier die wir gebraucht ha- 485 ben / eine Kugel zu formiren / durch die Bewegung eines halben Circkels / gibt uns folgende Eigenschafften zu verstehen.

1°. Alle die puncten des Umkreises die- 486 ses halben Circkels als D. d. d. Fig. 20. beschreiben um den Axt lauter Circkel die einander parallel seynd.

2°. Alle die puncten des Umkreises sol- 487 cher parallel Circkel / seynd gleich entfernet von einem polus A. wie auch von dem andern B. Fig. 20. Darum wollen wir forthin

diese zwey puncten A. und B. die polos nennen aller solcher parallel-Circkel als ed. welche auf die Ober-Fläche der Kugel liegen / weil diese puncte A und B. gleich entfernet seynd von allen puncten solcher Umkreisen.

Und den Diameter als AB. der von einem Polus zum andern gehet / wollen wir den Axt dieser Circkel nennen.

488 3°. Nun ist es klar / daß alle diese Circkel nur zwey gemeine Polos haben/und nur einen Axt.

489 4°. Daß ihr Axt auf alle ihre Flächen ⊥ stehet / und daß er durch alle ihre Centra fähret / daß er auch alle Entfernungen solcher Circkel abmesset/wie auch ihre Entfernungen von dem Centro der Kugel/ und von den Polis.

490 5°. Daß der gröste unter allen solchen Circkeln DE. Fig. 20. gleich entfernet ist von beyden Polis, und daß dessen Fläche durch das Centrum der Kugel fähret / daß der kleineste am nähesten bey den Polis ist / oder daß er am weitesten sich vom Centro der Kugel entfernet.

491 Endlich / seynd diese Circkel gleich / die von dem Centro gleich entfernet stehen.

492 6°. Alle Circkel die durch das Centrum der Kugel fahren / werden grosse Circkel der Kugel genennet / und alle die nicht durch das Centrum der Kugel fahren / werden kleine Circkel der Kugel genennet.

VI. In

VI. In der Beschreibung der Kugel/ wann der halbe Circkel ADB. Fig. 21. gekommen ist in AFB. so haben die puncten D. d. d. die Bogen DF. df. df. beschrieben/ deren ein jeder eine gleiche Zahl gradus in sich begreiffet. 493

Caput III.

Von der Ober-Fläche der Eck-Seule und der runden Seule/ oder des Prismatis und des Cylindri.

Benennungen.

Bildet euch ein/ eine gerade Linie Aa. einer gewissen Länge die auf die Fläche ABCD. der Fig. 22. erhoben seyn/ um welche Figur diese Linie sich beweget immer parallel mit ihr selbst/ indem ihr Ende A. die Figur ABCD. beschreibet/ so wird ihr ander Ende a eben so die Figur abcd. beschreiben/ die der ersten gleich und gleichförmig ist/ und alsdann heisset der Raum/ der zwischen diese zwo Figuren/ und durch die Bewegung der Linie Aa. umschräncket ist/ Prisma, oder Eck-Seule. 494

Die zwo Figuren ABCD. und abcd seynd die Grundflächen des Prisma, wann die Linie

nie Aa die durch ihre Bewegung das Prisma beschrieben hat / ⊥ ist auf die Fläche / so heisset es ein rechtwinckelichtes Prisma, wann sie aber schieff drauf ist, so heisset es ein schieffes Prisma.

Fig. 23. Wann die Grundfläche ein △ ist / so heisset es ein triangular, oder dreyeckichtes Prisma.

Fig. 24. Wann die Grundfläche ein Viel-Eck ist / so heisset es ein Vielseitiges Prisma.

Fig. 25. Wañ aber die Grundfläche ein parallelogrammum ist / so heisset das Prisma ein parallelepipedum, welches ein Cubus oder hexaëdrum ist / wann die Flächen die es umschräncken lauter gleiche Quadrat seynd.

Fig. 26. Wann die Grundfläche ein Circkel ist als AB. dann heisset es nicht mehr ein Prisma, sondern ein Cylindrus oder runde Seule / in welchem man nennet Axt die Linie cD, die von einem Centro zum andern kommet.

Der Cylindrus kan auch seyn rechtwinckelicht oder schieff.

Die Höhe eines schieffen Prisma oder Cylindrus ist die ⊥ b E. die zwischen die zwo Grundflächen beschlossen ist. Fig. 22. 26.

Eigenschafften.

495 WAnn man begreiffet und wohl betrachtet die vorige Beschreibung der Natur des Prisma, so begreifft man

man auch gantz leicht die folgende Eigen- 496
schafften.

I. Fig. 27. Die Spitze a. beschreibet die Linien ab. bc. cd. und da. welche = und gleich seynd ihren correspondenten auf die unterste Grundfläche/welche folglich gleiche < formiren/und dann auch eine Figur gantz gleich und gleichförmig mit der untersten Grundfläche / und seynd auch solche zwo Grundflächen einander parallel.

II. Fig. 27. Wann man an statt des 497
puncts a. hätte den punct e. gebraucht / so hätte man die Figur efgh. bekommen / gleich und parallel mit den vorigen Grundflächen.

Woraus folget / daß wann man ein 498
Prisma schneidet / durch eine Fläche die der Grundfläche parallel ist / so ist der Schnitt eine gleiche und parallele Figur, mit der Grundfläche.

III. Das Prisma, ist mit lauter paralle- 499
logr. umschräncket und beschlossen welche rechtwinckelicht seynd / wann das Prisma rechtwinckelicht ist.

IV. Man kan einen Cylindrum oder 500
Wulst betrachten als ein Prisma einer unendlichen Zahl Seiten/und derowegen/muß von dem Cylindrus verstanden werden / alles was wir von dem Prisma gesagt haben.

V. Fig. 28. Wann ein Wulst durch eine 501
Fläche geschnitten wird / so ist der Schnitt entweder ein Circkel als ab. oder ein läng-

lichter Circkel als cd. welcher Ellypsis genandt wird.

Caput IV.

Von der Ober-Fläche des Eck-Kegels und des runden Kegels.

Das ist /

Der Pyramis und des Conus.

502 Bildet euch ein / eine Figur als ABCD. und den punct O. Fig. 29. ausser / und über ihrer eigenen Fläche / da die Linie AO. angemacht seye / und setzet daß solche Linie sich bewege / um die Figur ABCD. herum / und aber an O. geheftet bleibe / solche Linie wird unterschiedene Flächen beschreiben / der Raum der in solchen Flächen eingeschräncket ist / heisset Pyramis oder Eckkegel / die Figur ABCD. ist die Grundfläche darvon / wann die Grundfläche ein △ ist / so heisset sie drey Eckichte Pyramis.

503 Wann eine Drey-Eckichte Pyramis umschräncket ist mit lauter gleichseitigen △, so heisset sie Regular-Pyramis oder Tetraëdrum.

504 Wann die Grundfläche ein Circkel ist / so heisset sie nicht mehr Pyramis, sondern Kegel oder Conus, in welchem die Linie OC, Fig.

Fig. 30. die von der Spitze O im Centro C. des Circkels fällt heisset der Axt oder Axis.

Nachdem der Axis ⊥ oder schief ist / auf die Grundfläche / so heisset er recht winckelichter conus, als Fig. 30. oder Schiefer Conus als Fig. 31.

Die Höhe einer Pyramis oder eines Conus ist die ⊥ OE. Fig. 31. die von der Spitze auf die Grundfläche fält. 505

Fig. 32. Wañ man die Seite AO. fortziehet in a über die Spitze O. die Bewegung der Linie AO. wird formiren einē Conus abO, der dem ersten / an der Spitzen gegenüberstehet.

Eigenschafften.

I.

Ein Eckkegel ist mit lauter △ umschrâncket / die ihre Spitzē im punct O. haben / und ihre Grundstriche an der Grundfläche des Eckkegels. 506

II. Fig. 33. Wañ man den Eckkegel durchschneidet durch eine Fläche die der Grundfläche. ABCD. parallel seyn / so wird man gegen die Spitze einen kleinē Eckkegel abcdO. abschneiden / der dem Ersten gleichförmig seyn wird / dann die Linien AO. OB. OC. OD. die von der Spitze des Ersten Eckkegels auf die Grundfläche gezogen werden / seynd d. n. 455. ebenmäßig geschnitten in abcd, durch eine parallele Fläche 507

und weil eben dieselbige Linien dienen für alle beyde Eckkegels / so machen sie nohtwendig auf alle beyde gleiche < d. n. 202. Ergo die conditiones oder Beschaffenheiten / die den einen Eckkegel determiniren seynd gleich denen / die den andern determiniren / woraus folget / daß die Eckkegel gleichförmig seynd. Derowegen seynd auch ihre Grundflächen ABCD und abcd. gleichförmige Figuren.

508 III. Fig. 34. Wann man einen Eckkegel in der Länge durchschneidet / mit einer Fläche die durch die Spitze O gehet / so ist der Schnitt ein △ Oef.

509 IV. Man kan einen Kegel oder Conum betrachten / als einen Eckkegel dessen Grundfläche von einer unendlichen Zahl Seiten / und derowegen / muß man von dem runden Kegel auch verstehen / alles was wir von dem Eckkegel gesagt haben.

510 V. Wann eine Fläche einen Kegel in der Länge durch die Spitze schneidet / so wird der Schnitt AOB. ein △ seyn. Fig. 35. wo er aber nicht durch die Spitze gehet / so wird er einen krumlinichten Schnitt machen / nehmlich / einen Circkel / als ab. Fig. 36. oder eine Ellypsis als cd. Fig. 35. oder eine Parabola als gef. Fig. 36. oder endlich eine Hyperbola als HKL. hkl. Fig. 37.

Und das Tractat, der Kegelschnitte / (sectionum conicarum) bestehet eigentlich in der Nachforschung der Eigenschafften der Parabo-

la

la der Ellipsis und der Hyperbola welche aber in der gemeinen Geometrie nicht tractiret werden.

Caput V.

Von der Gleichheit und von dem Maaß der Ober-Flächen der Cörper.

Eigenschafften.

Wann man eine recht winckelichte Eck-Seule oder einen gerad-winckelichten Wulst oder Cylindrum auswickelt / so wird man dadurch bekommen ein parallelogr Rectangu um, dessen der Grundstrich ABCDA. Fig. 38. oder ABA. gleich ist dem Umkreiß der Eck-Seule oder des Cylindrus, und dessen Höhe / Aa. ihren Höhen gleich seynd. 511

Und darum dann / um die Ober-Fläche einer Eck-Seule / oder eines Wulsts zu finden / darf man nur ihren Umkreiß mit ihrer Höhe multipliciren d. n. 390.

II. Fig. 39. 40. Aber wann man eine schiefe Eck-Seule/oder einē schiefen Cylindrum auswickelt / so wird man eine irregular Figur haben / die da seyn wird / eine Art eines vermischten parallelogr. und sie wird gleich seyn einem Rectangulo, der gleiche Höhe Aa. und gleiche Breite mit dem Umkreiß efgh. haben wird / welche Breite aber muß ge- 512

genommen werden durch eine Linie efghe. welche der Höhe des vermischten parallelogr. ⊥ ist / diese ist formiret / durch einen ⊥ Schnitt über die Länge der Eck-Seule oder des Cylindrus.

Und darum dann / um die Ober-Fläche einer schiefen Eck-Seule oder Cylindrus zu finden / muß man nur miteinander multipliciren d. n. 390. die Seite Bb. der Eck-Seule oder des Cylindri mit ihrem Umkreiß der ⊥ auf die Länge Aa. genommen efgh.

513 III. Wann ein Eckkegel umschräncket ist / mit lauter △, also daß er in einem ⊥ Conus könte eingeschrieben werden / die Auswickelung solches Eckkegels wird bestehen aus lauter gleichschenckelichten △, die alle eine Höhe haben werden.

Und darum dann / um die Ober-Fläche solches Eckkegels zu finden / so darff man nur mit einander multipliciren / den Umkreiß ihrer Grundfläche / nehmlich ABCDA. Fig. 41. mit der Hälffte der Höhe OE. eines von ihren △. d. n. 391.

514 Aber um die Oberfläche eines schiefen Eckkegels zu finden / so muß man d. n. 395. die Summam machen von allen den Flächen der △. die ihn umschräncken / nachdem man ins besondere einen jeden △. d. n. 391. ausgerechnet. Fig. 42.

515 IV. Wann man einen geradwinckelichten Conum oder Kegel auswickelt / so bekommet man einen Sectorem, eines Circkels / dessen

dessen Radius gleich ist der Seite AO. Fig. 43. und der Bogen gleich dem Umkreiß des Circkels der die Grundfläche des Kegels ist.

Und weil solcher Sector d. n. 384. gleich ist einem geradwinckelichten △. dessen Höhe ist der Radius und der Grundstrich sein Bogen / so folget daraus / d. n. 391. daß um diese Fläche zu finden / man nur mit einander multipliciren muß die Hälffte der Seite AO. mit dem Umkreiß der Grundfläche ABA.

V. Wañ man ein Stück ABab. eines geradwinckelichten Kegels auswickelt / so wird es eine vermischte Fläche machen / dessen Länge ist Aa. und die Grundstriche seynd die Bogen aba, ABA / die da gleich seynd denen Umkreisen der grossen und der kleinen Grundfläche dieses Stücks. Fig. 44. 516

Und diese Fläche / durch eine Folge des n. 397. ist gleich einem Trapezio, dessen Breite gleich ist der Höhe Aa. des Stück-Kegels / und dessen zwo parallel Seiten gleich den zweyen Bogen dieser vermischten Fläche / aber um diese Fläche auszurechnen / muß man nur d. n. 392. multipliciren / diese Breite Aa. durch die Mittel-Linie mnm. also auch / um die Oberfläche des Stückkegels auszurechnen / muß man nur seine Höhe Aa. multipliciren durch den mittel-Umkreiß mnm.

VI. Fig. 45. Ziehet an einem halben Circkel 517

ckel die Tangens Qd. $=\!=$ mit dem Axt AB. ziehet eine andere Tangens RS. welche die erste Qd. in R. schneide / den Umkreiß in D. anrühre / also daß DR ∞ DS. und aus den puncten R, S. ziehet auf dem Axt AB. die $\perp$ QL. RN. wann das also vorbereitet ist / so ihr den halben Umkreiß um den Axt drehet / selbiger halber Umkreiß wird die Oberfläche einer Kugel beschreiben / die Tangens SR. wird die Oberfläche eines Stück Kegels beschreiben / welche der Kugel umbschrieben ist / und die Linie RQ wird die Oberfläche eines Cylindri oder Wulsts beschreiben / welcher so wohl als das Stück Conus / begriffen seyn wird zwischen die zwo parallel Flächen welche durch QL. und RN. beschreiben werden; alsdann sage ich / daß die Oberfläche des Stückkegels gleich seye der Oberfläche des Cylindrus, oder Wulsts.

Wir wissen schon d. n. 516. daß um die Oberfläche des Stückkegels auszurechnen / man mit einander multipliciren muß / die Seite SR. mit der Circumferentz die durch D. fahret / und deren MD Radius ist und d. n. 512. daß um die Oberfläche des Cylindri auszurechnen / man mit einander multipliciren muß die Höhe QR. mit dem Umkreiß seiner Grundfläche das ist / mit dem Umkreiß der NR für Radius hat / so muß man dann beweisen / daß der product von SR. mit der circumferentz des Radius MD. gleich

sey

seye dem Product von QR. mit der circumferentz des Radius NR. Hierzu/ziehet ST. ⊥ auf NR. und ziehet auch den Radius CD. also werden wir den rechtwinckelichten △ SRT. bekommen der gleichförmig mit dem △ CMD. ist/ dann ein jeder hat schon einen rechten ∠. und über dem/ wann man DM. fortziehet biß an dem Umkreiß in E. weil die Spitze D. in dem Umkreiß stehet/ so hat der ∠ SDE, d. n. 220. für sein Maaß die Hälffte des Bogens DAE. das ist/ den Bogen AD. nun hat der ∠ MCD. d. n. 157. eben den Bogen AD. für sein Maaß. Ergo der ∠ MCD. ist gleich dem ∠ SDM. und darum auch d. n. 201. gleich dem ∠ SRT. weil er gleich ist an SDM. wegen der ═ MD. NR. weil dann die zwey △ SRT. und MCD. zwey ∠ einander gleich haben/ so seynd sie auch gleichförmig d. n. 349. Ergo d. n. 341. CD. MD. SR. ST. oder an statt CD. nehmet Cd. die ihr gleich ist d. n. 139. oder auch NR. und an statt TS. setzet QR. so habt ihr NR. MD :: SR. QR. und an statt der zwey Radius NR. MD. nehmet ihre Umkreiß die d. n. 362. in eben derselben Verhaltnuß stehen/ so habt ihr den Umkreiß NR. gegen den Umkreiß MD :: SR. QR. in welcher Ebenmäßigkeit wann man die mittelste und die äuserste multipliciret/ so ist d. n. 71. der Product von QR. mit der circumferentz des Radius NR. (welcher

d. n. 511. gibt die Ober-Fläche des Cylindrus) gleich dem Product von SR. mit der circumferentz des Radius MD. (welcher d. n. 516. gibt die Ober-Fläche des Stück-Kegels) W. M. B. W.

518 VII. Wann hier BD. Fig. 46. die Tangens ist in O. und daß OB. OD. gleich seynd / die Umdrehung des halben Circkels COG. indem sie die Ober-Fläche der Kugel beschreibet / so beschreibet auch die Linie DB. die Ober-Fläche eines Kegels / welcher gleich ist / d. n. 515. einem geradwinkelichten △, dessen BD. wäre die Höhe / und der Grundstrich wäre der Umkreiß des Radius DF. und derowegen d. n. 381. und 362 auch gleich einem ▭ dessen Höhe wär BD. und dessen Grundstrich wäre der Umkreiß eines Circkels dessen Diameter wäre DF. Aus dem Centro A. ziehet AO. und derselben die ═ DE. weil nun BO. die Hälffte ist von BD. so ist auch d. n. 241. der Radius AO. die Hälffte von DE. Ergo DE. ist gleich dem Diameter CG. Nun will ich beweisen/daß der Product von BD. mit der circumferentz des Diameters DF. (das ist d. n. 515. und 381. die Ober-Fläche des Conus,) gleich sey dem Product der Höhe des Conus BF. mit dem Umkreiß des Diameters DE. oder CG. (das ist d. n. 511. der Ober Fläche des Cylindrus HI.)

Weil DB. Tangens ist/so ist sie d. n. 213. ⊥ auf OA, und also auch d. n. 201. auf

DE.

DE. und darum sind die △ DEF. DBF. gleichförmig wie bey n. 409. bewiesen / weil über dem DF. ⊥ auf BE. ist. Hieraus folget dann d. n. 241. daß BD. BF :: DE. DF. und wann man an statt der Diameter DF. und DE. die Umkreiß ihrer Circkel setzet/ welche d. n. 362. in gleicher Verhaltnus stehen/ so wird folgen d. n. 71. daß der Product von BF. mit dem Umkreiß des Diameters DE. oder CG. (das ist / d. n. 511. die Ober-Fläche des Cylindri HI.) gleich seye dem Product von BD. mit der circumferentz des Diameters DF. (das ist d. n. 515. der Ober-Fläche des Kegels DBK. W. M. B. W.

519 VIII. Wann man den halben Circkel mit lauter Tangentes S. S. S. &c. Fig. 47. um und um einschliesset / welche ein halbes regular-polygonum circumscriptum einer ungleichen Zahl Seiten formiren / und daß man ziehet die ═ Linien ED. ed. ed. ed. &c. durch die Puncten wo solche Tangentes < machen / und daß man endlich durch D. eine lange Tangens MN. ziehet ═ mit dem Axt AB. der halbe Circkel / durch seine Umdrehung um den Axt AB. wird die Ober-Fläche der Kugel formiren / die kleine Tangentes S. S. S. werden um diese Kugel lauter Stück-Kegel formiren / und zwey kleine gantze Kegel unendlich kurtz gegen die zwey Enden A. und B. und die Mittelste dDd. einen unendlich kurtzen Wulst / und die Theile Dd, dd. dd.

der langen Tangens MN. werden lauter gerade Seulen oder Wulst formiren / von gleicher Höhe mit denen Stück-Kegeln oder gantzen Kegeln weil sie zwischen parallele Flächen begriffen seynd; Wann alles also præpariret / so folget aus vorhergehenden.

1°. Daß eine jede Ober-Fläche der Stück-Kegel d. n. 517. oder gantzen Kegel d. n. 518. S. S. gleich ist der Ober-Fläche dd. dd. ihrer correspondirenden Seule / welche mit ihm zwischen zwo parallele Flächen begriffen ist. Und die Mittelste dDd. weil sie unendlich kurtz ist / ist nur eine Linie hoch / und formiret also nur die Fläche ihrer Seule / die auch der Kugel gantz und gar zu gehöret.

2°. Also ist dann die Summa der Ober-Flächen dieser Stück-Kegel und Kegel / und der Mittelsten Seule dDd. alle zusammen / welche die Kugel einschliessen / gleich der Ober-Fläche des grossen Cylindrus der durch die Tangens MN. formiret ist / und der begriffen ist zwischen die zwo Flächen AM. NB. die den obersten und untersten unendlich kleinen gantzen Kegel einschräncken.

3°. Wann die Tangentes S. S. unendlich klein præsupponiret werden / so werden sie nichts anders seyn als die circumferentz selbst / und folglich / die Ober-Fläche solcher Stück-Kegel und Kegel wird nichts anders seyn als die Ober-Fläche der Kugel selbst /

selbst/ aber die Ober-Fläche solcher Stück-Kegel und Kegel zusammen genommen/ ist gleich der Ober-Fläche des Cylinders der mit MN. formiret wird; Ergo so ist die Ober-Fläche der Kugel selbst/ gleich der Ober-Fläche einer Seule deren Grund-Fläche einem grossen Circkel der Kugel gleich ist und dessen Höhe gleich ist dem Diameter AB. oder MN.

Fig. 48. Hieraus folget 1°. daß um die Ober-Fläche einer Kugel auszurechnen/ man nur die circumferentz DED. ihres grossen Circkels multipliciren muß mit ihrem Diameter AB. 520

2°. Daß die Ober-Fläche der Kugel vier mahl so groß ist als die Fläche eines grossen Circkel der Kugel/ durch gegenhaltung mit n. 396. 521

3°. Der Quadrat Ab. des Diameters der Kugel stehet zu der Ober-Fläche AD. der gantzen Kugel/ wie der Diameter AB. stehet zu der circumferentz ihres grossen Circkels DED. 522

Dann um den Quadrat des Diameters zu formiren/ d. n. 388. muß man den Diameter mit sich selber multipliciren/ und um die Ober-Fläche der Kugel zu formiren weil sie der Ober-Fläche der vorgedachten Seule gleich ist/ muß man d. n. 511. den Diameter mit dem Umkreiß eines ihrer grossen Circkels multiplieiren.

So stehet derowegen d. n. 403. der

Quadrat des Diameters der Kugel gegen ihre Ober-Fläche als 7. gegen 22. oder als 113. gegen 355. oder endlich als 100. gegen 314. welches sind die gebräuchliche Verhaltnüssen des Diameters eines Circkels gegen seine circumferentz.

523 Die Ober-Fläche des Segmenti einer Kugel oder einer Kappe so zu sagen / ist gleich dem Product, der circumferentz ihres grossen Circkels mit der Höhe AE. solcher Kappe Fig. 48. Dann sie ist gleich der Ober-Fläche eines Cylindri dessen basis ist ein grosser Circkel der Kugel / und die Höhe / ist die Höhe der Kappe.

524 Eben aus der Uhrsach / ist die Ober-Fläche einer Zonæ, oder eines Gürtels der Kugel / welche umschränket ist mit zwey parallel-Circkeln GH. und KL. Fig. 48. gleich dem Product der circumferentz ihres grossen Circkels mit der ⊥ Höhe EF. solches Gürtels.

Caput VI.

Von der Verhaltnüß der Ober-Flächen der Cörper.

525 Hier kan man wieder vorbringen alles was wir von den Flachen Figuren in dem vierdten Capitel des vier-

vierdten Buchs gesagt haben / zu dem man nur noch setzen muß / daß wann zwey Cörper gleichförmig seynd / das ist / daß sie mit gleichförmige Figuren umschräncket seynd / ihre Ober-Flächē stehen gegen einander / als die Schnitte die man mit gleichen Umständen oder conditiones darinnen machen kan / oder als die Quadrat der Linien die gleicher Weise darinnen gezogen werden.

Fig. 49. So stehen derowegen die Ober-Flächen der Kugeln A. und a. gegen einander wie die Quadrat BB. und bb. ihrer Diameter.

Ende des Sechsten Buchs.

(o)

ELEMENTA GEOMETRIÆ,

Liber VII.

Von den Cörpern oder dichten Figuren / betrachtet nach Ihrem Cörperlichen Inhalt.

526 UM den Cörperlichen Inhalt eines Cörpers zu erkennen / muß man eben die Reflexiones thun / und die Gedancken gebrauchen die man gebrauchet hat um die Ober-Fläche der Flachen Figuren zu erkennen / mit diesem Unterscheid / daß man zu einer Flachen Figur nur zwo dimensiones betrachten muß / nehmlich / Länge und Breite / und zu einem Cörper muß man drey dimensiones vor Augen haben / Länge / Breite und Dicke.

Caput I.

Von den Untheilbahren Theilen in den Cörpern.

Wann

Wann man eine Eck-Seule zertheilet durch lauter parallele Flächen Fig. 1. deren Dicke unendlich klein und einander gleich seynd / diese Flächen werden den Cörper in lauter Schnitte zertheilen / das ist / in kleine Eck-Seulen deren die Grundflächen werden gleich seyn / den parallel-Flächen die durch die Schnitte geschehen seynd / und ihre Höhen oder Dicken unendlich klein. Und wann es ein Spitz-Cörper wäre / diese Flächen werden den Cörper in lauter Schnitte zertheilen / deren Grundfläche werden unter einander und mit der Grundfläche des Kegels oder Eck-kegels gleichförmig und parallel seyn; Und solche Schnitte nun / können wir Elementa der Cörper nennen / und werden Untheilbar genennet / weil man ihre Dicke nicht mehr als theilbar betrachtet. Man kan ein Buch oder ein Karten-Spiel betrachten / als ein parallelepipedum welches auf grober Manier in seine Elementa zertheilet ist / und ein Zwiebel als eine Kugel die auch in ihre Elementa zertheilet wäre. 527

528 Um nun zwey Cörper zu vergleichen / vermittelst ihrer Elementen, muß man eben die Gedancken gebrauchen / die man bey denen Elementen der flachen Figuren gebrauchet hat / das ist / daß man in acht nehmen muß / nicht allein die Grösse der

Fläche eines jeden Elements / sondern auch ihre Zahl und ihre Dicke / welche auch determiniret ist durch eine ⊥ Linie die auf alle zusammen gleich schieff ist.

529 Wann man einen Cörper zertheilet in lauter geradwinckelichte Würfel oder Cubus als Fig. 2. oder in schieffe Würffel als Fig. 3. so wird man sagen / daß ein solcher Cörper in seine Einheiten (unitates) zertheilet ist.

Alles was wir zuvor / bey den Flächen / von den Einheiten gesagt haben / kan man hier auch gebrauchen.

Caput II.

Von den dichten Figuren.

Eigenschafften.

530 DIe Eck-Seulen Fig. 4. und die Runde-Seulen Fig. 5. die gleiche Höhe und gleiche Grundflächen haben / seynd einander gleich.

Dann wann man sie beyde in ihre Elementa zertheilet / es werden sich derselben eine gleiche Zahl in alle beyde finden / weil sie gleicher Höhe seynd.

Aber ein jedes Elementum Fig. 4. ist seiner Grundfläche gleich / D. n. 527. eben

eben wie ein jedes Elementum Fig. 5. seiner Grundfläche gleich ist/ und solche Grundflächen werden gleich præsupponiret/ Ergo so seynd dann die Elementa aus Fig. 4. und aus Fig. 5. einander gleich/ und weil sich eine gleiche Zahl gleicher Elementa in diesen Eck-Seulen und Wulst befinden/ nemlich/ wann sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben/ so seynd sie dann einander gleich.

Die Eck-Kegel und die Runde-Kegel 531
die gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben seynd auch einander gleich. Fig. 6.

Dann wann man setzet/ daß sie zwischen zwo parallele Flächen begriffen seynd als X. und Y. Fig. 7. und daß man sie in ihre Elementa zertheilet/ durch andere Flächen die mit ihren Grundflächen parallel seynd/ ein jedes Elementum aus einem/ wird gleich seyn einem jeden Elemento aus dem andern/ das ihm correspondiret;

Beweiß. Wann man sie beyde in ihre Elementa zertheilet/ so werden sich derselben eine gleiche Zahl gleicher Höhe in allen beyden Figuren finden/ weil diese Figuren gleicher Höhe seynd/ aber d. n. 527. ein jedes Element E. oder e. stehet zu seinem correspondenté C. oder c wie die Grundfläche B. oder b. zu der Grundfläche D. oder d. nun aber setzen wir daß die Grundflächen B. und D. einander gleich seynd/ woraus folget d. n. 70. daß dann auch die

Elementa E. und C. einander gleich seynd/ so stehet dann nur noch zu beweisen/ daß die Grundflächen b. und d. auch einander gleich seynd/ woraus folgen wird daß die Elementa e. und c. auch einander gleich seynd.

Um dieses zu thun/ darff man nur betrachten daß d. n. 526. diese kleine Grundflächen b. und d. gleichförmig seynd den grossen B. und D. und daß die correspondirende Höhen einander gleich seynd/ als AO. ∞ FO. und aO. ∞ fO. &c. Wie auch die Fläche B ∞. der Fläche D. und also daß d. n. 346. die gantze Höhe AO. gleicher Weise/ oder mit gleichen Beschaffenheiten und conditiones auf die Grundfläche D. gezogen ist/ als die Höhe aO auf die Grundfläche d. und eben auch FO. auf B. wie fO. auf b. woraus folget d. n. 407. daß eben wie der □ fO. b. :: □aO. d. und alternando, d. n. 80 der □ fO. □aO. :: b. d. das ist/ daß alles gleich ist/ weil aO ∞ fO. woraus dann endlich folget was man vorhatte/ daß weil der Kegel und der Eck-Kegel ein jeder eine gleiche Zahl gleicher Elementen in sich begreifft/ so seynd sie am Cörperlichen Inhalt gleich.

532 Ein Parallelepipedum kan in zwo Dreyeckichte Eck-Seulen zertheilet werden/ durch einen Zwerchschnitt BDdb. Fig. 8. wie solches hier vor Augen und auch d. n. 317. klar erscheinet.

Eine

Eine Drey-Eckichte Eck-Seule kan in drey gleiche Eck-Kegel zertheilet werden/ deren zwey gleiche Höhe und Grundfläche mit der Eck-Seule haben. Welches leicht zu mercken seyn wird/ wann man aus einem Apfel oder Rüben eine Drey-Eckichte Eck-Seule formiret/ dann dise wird man leicht in drey Eck-Kegel schneiden/ wie es hier die Figur 9 anweiset. Alsdann wird man gleich mercken/ daß wann man solcke Eck-Kegel zwey und zwey gegen einander vergleichet/ sie gleiche Grund-Flächen und gleiche Höhen haben/ und sich allzeit zwey unter diesen dreyen befinden werden/ welche eben die Grundfläche und die Höhe der vorgegebenen Eck-Seule haben / und folglich/ d. n. 531. daß sie alle drey einander gleich seynd. Die Fig. 9 ist die gantze Eck-Seule/ und ihre drey Stücke welche drey Eck Kegels seynd/ kan man in der Fig. 10. sehen mit ihren rechten Buchstaben also daß man ihre correspondentz mit der Figur 9. mercken kan/ und in denselben alles was man von ihnen indem gesagt. Die zwey D. und E. haben eben die Höhe der Eck-Seule nehmlich Aa. und Cc. und eben die Grundfläche nehmlich/ die △ ABC. und abc, die zwey E. und F. aber haben für ihre Grundflächen die zwey gleiche △ BCb. und bCc. und ihre Spitzen alle beyde in einem einigen punct a, Ergo so haben sie dann auch gleiche Höhe. 533

534 Hieraus folget/ daß ein Drey-Eckichter Eck-Kegel das dritte Theil ist einer Drey-Eckichten Eck-Seule gleicher Höhe und gleicher Grundfläche.

535 Alle Eckkegel seynd das Drittel einer Eck-Seule gleicher Höhe und gleicher Grund-Fläche. Dann man kan die Eck-Seule und auch den Eck Kegel Fig. 11. zertheilen/in einer gleichen Zahl anderer Drey-Eckichten Eck-Seulen und Eck-Kegel / und d.n. 534. ein jeder Eck-Kegel als OABE. wird das Drittel seyn einer jeden Eck-Seule abeEBA. die ihm correspondiret / Ergo, so ist dann auch der gantze Eck-Kegel das dritte Theil der gantzen Eck-Seule.

536 Fig. 12. Man kan einen Kegel und einen Wulst betrachten / als eine Eck-Seule und einen Eck-Kegel deren Grundfläche eine unendliche Zahl Seiten hat.

537 Derowegen ist dann auch ein Kegel das Drittel einer Seulen oder Wulsts gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

538 Fig 13. Das Stück eines Drey-Eckichten Eck-Kegels ABCDEF. welches gemacht durch einen Schnitt DEF. der mit der Grundfläche ABC = ist / kan in drey Eck-Kegel zertheilet werden/ die gegen einander stehen werden/in gebundener proportion der correspondenten Seiten von der Ober-und Grundfläch. Als hier zum Exempel, wie AC. gegen ED. und zwar also / daß die äusersten von diesen drey Eck-Kegeln/ eben die

die Höhe des vorgegebenen Stücks haben/ der eine aber mit der Grundfläche ABC. und der andere mit der Grundfläche EFD. der Erste ist hier ABCD. der andere AEBD. und der dritte EFDB.

Dann die △ ADC. ADE. welche zwischen zwo ═ AC. ED. begriffen seynd/ stehen gegen einander d. n. 403. als ihre Grundstriche AC. und ED. aber weil die zwey Eck-Kegel ABCD. und ADEB. von gleicher Höhe seynd / in dem sie ihre Spitzen alle beyde in B. haben / so stehet d. n. 403 der △ ADC. zu dem △ADE. als der Eck-Kegel ABCD. zu dem Eck-Kegel ADEB. Ergo d. n. 70. der Eck-Kegel ABCD. steht zu dem Eck-Kegel ADEB :: AC. DE.

Zum Andern / die zwey Eck-Kegel AEBD. und EFBD. wann man den Punct D. für ihre gemeine Spitze nimmet/ stehen gegen einander d. n. 403. als ihre Grundflächen AEB. FEB. aber diese zwey △ d n. 403. weil sie gleicher Höhe seynd/ stehen gegen einander als AB. gegen EF. oder d. n. 241. als AC. gegen ED. Ergo d. n. 70. so stehet dann auch der Eck-Kegel AEBD. zu dem Eck-Kegel EFBD :: AC. ED. woraus erhellet/ dieser Geometrische Fortgang/ in der Verhaltnuß von AC. gegen ED. ∺ Eck-Kegel ABCD. Eck-Kegel ADEB. Eck-Kegel EFBD. W. Z. B. W.

Hieraus folget / weil man allerhand Eck-Kegel in triangulare Eck-Kegel theilen kan / 539

daß

daß allerhand Stück Eck-Kegel kan zertheilet werden in drey andere Eck-Kegel die gebundener Weise ebenmäßig seynd in ratione laterũ homologorum, das ist/ in Verhaltnus ihrer correspondenten Seiten / darvon der Erste und letztere die zwo Grundflächen des Stücks für ihre Grundfläche haben / und gleiche Höhe mit dem gantzen Stück Kegel.

540 Weil der Circkel angesehen wird als ein Viel-Eck einer unendlichen Zahl Seiten/so kan auch ein Stück-Kegel zertheilet werden in drey andere Kegel die gebundener Weise ebenmäßig seynd in Verhaltnuß der Diameter der gegenüberstehenden Grundflächen darvon der Erste die unterste Grundfläche hätte und der Letzte die oberste und welche gleich hoch wären mit dem Stück-Kegel.

541 Man kan eine Kugel betrachten als eine Zusammensetzung von Eck-Kegeln deren alle die Spitzen / im Centro stehen / und ihre unendlich kleine Grundflächen in der Oberfläche der Kugel / welche alle den Radium der Kugel für ihre gemeine Höhe haben Fig 14. Alle diese zusammen genommen / seynd gleich einem Eck-Kegel oder einem runden Kegel gleicher Höhe / und dessen Grundfläche gleich wäre allen diesen Grundflächen zusammen / das ist / der Oberfläche der Kugel.

542 Derowegen / ist die Kugel gleich einem Eck- oder runden-Kegel dessen Grund-

fläche

fläche gleich ist der Oberfläche der Kugel und dessen Höhe wäre der Radius.

Alle dichte Figuren können in Eck-Seulen oder in Eck-Kegels zertheilet werden. 543

Caput III.

Von dem Maaß der dichten Figuren.

MAn saget der Cörperliche Inhalt eines Cörpers sey bekandt/ wann man weiß wieviel er gemeine Maaß in sich hält. 544

Fig. 15. Das Maaß der Cörper ist ein Cubus oder Würfel/ dessen alle Seiten gleich seynd/ und einer bekandten Maaß lang/ als eines Schuhes/ einer Ruhten/ einer Toise &c.

Fig. 16. An statt eines geradwinckelichten Cubus könte man auch wol einen schiefwinckelichten brauchen/ dessen Flächen lauter Rhombus oder Rauten wären. 545

Eigenschafften.

DIe Eck-Seulen und die runde Seulen Fig. 17. und 18. seynd gleich dem Product ihrer Grund-Fläche mit ihrer Höhe oder Länge. 546

Dann zertheilet die Grund-Fläche in ihre viereckichte Einheiten Quadrat oder Rhombus, und theilet auch ihre Höhe in solche Theile die den Seiten solcher quadraten oder Rhombus gleich seynd / und lasset lauter Flächen durchziehen die mit der Grund-Fläche parallel lauffen / die gantze Figur wird in so viel Schnitte zertheilet seyn als Theile in der Höhe sich befinden / und ein jeder Schnitt hält in sich so viel cubische Einheiten als die Grund-Fläche quadraten oder Rhombus in sich hat. Ergo wann man die Zahl der Einheiten der Grund-Fläche multipliciret mit der Höhe oder Länge / so bekommet man die Zahl der Cörperlichen Einheiten / oder den Cörperlichen Inhalt der Eck-Seule / oder runden Seule.

Im vierdten Buch haben wir die Manier angewiesen / wie man die Grund-Flächen finden soll / oder die Zahl ihrer flachen Einheiten.

547 Notiret aber / daß die Einheiten der Eck-Seulen oder der runden Seulen werden geradwinckelichte Cubus oder Würffel seyn / wann ihre Linien die man mit einander multipliciret aufeinander ⊥ fallen / aber wann sie schief aufeinander fallen / werden sie auch schieffe Würffel machen.

548 Fig. 19. Die schieffe Eck-Seulen und runde Seulen seynd gleich dem product ihrer Grund-Fläche durch ihre ⊥ Höhe.

Dann die schiefe Eck-Seulen und

runde

runde Seulen seynd gleich d. n. 530. den rechtwinckelichten die mit ihnen gleicher Grundfläche und gleicher Höhe seynd; nun aber d. n. 546 seynd diese letzte gleich dem product ihrer Grundfläche mit ihrer ⊥ Höhe / Ergo &c.

Notiret/ daß wann die Einheiten der Grundflächen rechte Quadrat seynd / und daß die Linien womit man sie multipliciret auf selbige Grundfläche auch ⊥ seynd / die cubische Einheiten die heraus kommen in solchen Figuren seynd geradwinckelichte Cubus. 549

Dieser erste Vortrag mit seinen Anmerckungen dienet zum principium oder fundament vor alle Cörperliche Inhalt. 550

Fig. 20. Die Eck-Kegel und runde Kegel seynd gleich dem dritten Theil des products ihrer Grundfläche mit ihrer ⊥ Höhe. 551

Dann d. n. 535. der Eck-Kegel und runde Kegel seynd das dritte Theil der Eck-Seulen und runden Seule gleicher Höhe und gleicher Grund-Fläche.

Fig. 21. Wann man von einem Stück Eck-Kegel oder runde Kegel/ die oberste und unterste Grundfläche addiret/ selbige aufhebet/ und darnach diese zwo Grundflächen auch miteinander multipliciret / von dem Product die Radix quadrata ausziehet/ selbige Radix zu der vorigen Summa addiret/ und was davon kommet multipliciret mit der 552

⊥ Höhe des Stücks / das dritte Theil des Products gibt den begehrten cubischen Inhalt des Stück-Kegel.

Dann diese Operatio gibt die Summa dreyer Kegel die in gebundener Ebenmässigkeit stehen / und welche alle die Beschaffenheiten an sich haben / die ihnen nach unserm vorhergehendem Beweißstück n. 538. zukommen. Dann die oberste und unterste Fläche dieses Stücks d. n 527. seynd gleichförmige Figuren / und darum stehen sie gegeneinander d. n. 407. wie die □ der gleicher weise darinnen gezogenen Linien / oder der correspondirenden Seiten; Es seye dann eine derselben Flächen genandt aa, die andere bb, und die ⊥ Höhe sey c; wañ ich die zwo Flächen miteinander multiplicire d. n. 15. so ist der Product aabb, und die Radix quadrata davon d. n. 18 ist ab. Wañ ich hier zu addire die Summa der zwo Flächē aa + bb und Multiplicire dieses alles mit der Höhe c, so komet aac + abc + bbc und das Drittel darvon ist $\frac{1}{3}$ aac + $\frac{1}{3}$ abc + $\frac{1}{3}$ bbc. welches ist das facit der operation die hier vorgeschrieben wird. Nun sihet man in diesen 3. Grössen d. n. 551. 15. daß $\frac{1}{3}$ aac die Grösse ist eines Kegels der aa zur Grundfläche und c zur Höhe hat; daß $\frac{1}{3}$ abc die Grösse eines andern Kegels ist dessen Grundfläche ab und

und dessen Höhe auch c, und daß die dritte $\frac{1}{3}$ bbc die Grösse eines dritten Keg ls wäre/ dessen Grundfläche bb mit eben derselben Höhe c, darnach siehet man d n. 72. daß diese drey Grundflächen aa, ab, bb in einer gebundenen Ebenmäßigkeit stehen / und d n. 38. daß derselben gemeine Verhaltnuß ist als a gegen b das ist d. n. 407. wie die correspondirende Seite oder wie die gleicher weise in den beyden Grundflächen aa und bb gezogene Linien / so muß man dann endlich schliessen d. n. 538. daß diese Summe $\frac{1}{3}aac + \frac{1}{3}abc + \frac{1}{3}bbc$ die Grösse ausweiset des vorgegebenen Stück-Kegels.

Die Kugel ist gleich dem dritten Theil 553 des Products von ihrer Oberfläche mit ihrem Radius. Dann d. n. 542. sie ist gleich einem Kegel dessen basis gleich wäre ihrer Oberfläche und dessen Höhe ihr Radius.

Was alle andere Cörper angehet / die 554 muß man alle durch eingebildete Schnitte in lauter Eck-Seulen oder Eck-Kegel zertheilen.

Dann eben wie man alle irregular ge- 555 radlinichte flache Figuren / mit Zwerchlinien in lauter △ zertheilen kan / nehmlich soviel △ als die Figur Seiten hat weniger zwey; Eben so kan man auch alle irregulare Cörper die mit ebenen Flächen umgeben

seynd in lauter Eck-Kegel zertheilen; nehmlich in so viel Eck-Kegel als die Figur unterschiedene Flächen hat/weniger so viel/ als da Flächen seynd/ die den dichten < formiren/ in welchem alle die Spitzen der Eck-Kegel versammlet seyn werden; und der da kan nach belieben ausgesehen werden/darum dann/ um desto weniger Eck-Kegel zu haben/ ist es besser daß man zu diesem punct der Versammlung aller Spitzen der Eck-Kegeln/ auslese den dichten <, der mit der grösten Zahl-Flächen formiret ist.

Caput IV.

Von der Vergleichung und Verhaltnus der Cörper.

556 Wir haben gesehen/ was für Linien man mit einander multipliciren muß/um den Cörperlichen Inhalt der dichten Figuren zu entdecken; wir wollen solche Linien die producenten der dichten Figuren nennen.

557 Wañ man eine dichte Figur mit einer andern compariren oder vergleichẽ will/ so muß man allezeit præsupponiren uñ voraus setzen/ daß die producenten der einen und die producenten der andern mit einander gleiche <

machen/

machen/ damit die Einheiten in allen beyden einander gleich seyen. Solche Einheiten werden rechte geradwinckelichte Würffel seyn wann die producenten auf einander ⊥ stehen/ aber schieffe Würffel als Rauten/ wann die producenten auf einander schief seynd.

Eigenschafften.

Zwo dichte Figuren stehen gegen einander als der Product der Producenten der einen/ gegen dem Product der Producenten der andern. 558

Dann d. n. 546. und 548. eine jede solcher Figuren ist solchem Product gleich/ oder doch einem außgehenden Theil desselben. Ergo d. n. 66. stehen sie gegen einander als die Product ihrer Producenten.

Woraus folget/ daß wann man zwo dimensiones des vorgegebenen Cörpers miteinander multipliciret/ um die Grundfläche desselbigen zu formiren/ und daß man solche Grundfläche alsdann/ als ein einiges Producent der dichten Figur anschauet/ so wird man hier appliciren und zueignen können/ alles was man zuvor von den flachen Figuren gesagt hat. Nehmlich/ 559

1°. Die Cörper welche gleiche und ungleiche Producenten haben/ stehen gegen einander/ wie die ungleiche. d. n. 403. 560

Das ist/ wann die Grund- oder Oberfläche AB und ab gleich seynd/ so stehen sie

gegen

gegen einander wie die Höhen / BC und bc Fig. 22.

Fig 23. Oder / welche die Höhen BC und bc einander gleich haben / die stehen gegen einander wie die Grundflächen A und a.

561 Notiret / daß wann ihr Eck-Kegel / runde Kegel / oder Kugel mit Eck-Seulen oder mit runde Seulen vergleichet / so müsset ihr nur das dritte Theil ihrer Höhe oder ihrer Grundfläch nehmen / weil sie nur das Drittel der Seulen gleicher Grundfläche und gleicher Höhe seynd d. n. 535. 542.

562 Fig. 24. Die dichte Figuren welche ihre Producente inwiederkehriger proportion haben / seynd einander gleich d. n. 404. Als wann BC. bc : : a. A. Das ist / wann die Höhe BC. eines Cörpers und seine Grundfläche A. die äussersten Sätze in einer proportion seynd / und daß die Grundfläche a. und die Höhe bc. eines andern Cörpers die mittelsten Sätze darvon seynd / so seynd solche Cörper einander gleich.

563 3°. Fig. 25. Wann die zwey producenten eines Cörpers BC. und A. proportional seynd / den zweyen producenten bc. und a. eines andern Cörpers / als / wann BC. bc : : A. a. so stehen solche Cörper gegen einander als die Quadrat der correspondirenden producenten d. n. 407.

Das ist / Fig. 25. Wann die Höhe BC. des einen sich verhält zu der Höhe bc des andern wie die Grundfläche A. des ersten

sten zu der Grundfläche a. des andern / so stehen solche Cörper gegen einander wie die Quadrat der zwoen Höhen BC. und bc.

4°. Aber wann die drey dimensiones BC. CD. DE. Fig. 26. eines Cörpers proportional seynd den dreyen dimensiones bc. cd. de. eines andern Cörpers / so stehen solche zwey Cörper gegen einander / als die Cubus der correspondirenden dimensiones gegen einander. 564

Als wann BC bc :: CD. cd :: DE. de. das ist / wann die Länge BC. des ersten / sich verhält gegen der Länge bc. des andern; wie die Breite CD. des ersten / gegen der Breite cd. des andern / und die Höhe DE. des ersten zu der Höhe de. des andern / so werden sich solche zwey Cörper gegen einander verhalten / als der Cubus der Länge BC. des ersten / gegen dem Cubus der Länge bc. des andern. Dann man siehet d. n. 544. daß die erste Figur gleich ist dem Product der ersten Sätze BC. CD. DE. und die andere gleich dem Product der andern Sätze bc. cd. de. Aber d. n. 77. der Product der 3. ersten Sätze stehet zu dem Product der drey andern / wie der Cubus eines ersten Satzes gegen dem Cubus eines andern Satzes; Ergo &c. Euclides, und andere sagen hier / die erste Figur stehe zu der andern / in ratione triplicata laterum homologorum, das ist / in dreyfacher Verhaltnus der correspondenten

Seiten / es ist dieselbe Meynung / aber unsere Auslegung ist leichter.

565 5°. Derowegen so stehen dann die gleichförmige Cörper gegen einander als die Cubus der Linien die gleicherweise in denselben gezogen werden.

566 Die Kugel Fig. 27 stehet zu der ihr umbeschriebenen runden Seule / als 2. gegen 3. das ist / daß sie die zwey Drittel derselben ist.

Dann d. n. 553. 1°. um den Cörperlichen Inhalt der Kugel auszurechnen / muß man ihre Ober-Fläche mit dem Drittel ihres Radius multipliciren / aber um ihre Ober-Fläche auszurechnen d. n. 520. muß man die circumferentz ihres grossen Circkels durch ihren diameter multipliciren / also seynd dann die producenten der Kugel; das Drittel des Radius, die circumferentz ihres grossen Circkels / und der diameter.

2°. Um den Cörperlichen Inhalt der umbeschriebenen runden Seule zu haben / muß man d. n. 546. seine Grund-Fläche durch seine Höhe multipliciren.

Aber d n. 396. um seine basis auszurechnen / die ein Circkel ist / muß man miteinander multipliciren / ihre circumferentz / die gleich ist der circumferentz des grossen Circkels der Kugel / durch die Hälffte ihres Radius; also daß die producenten der runde Seule seynd; der diameter der Kugel / die circumferentz ihres grossen Circkels / und die Hälffte ihres

Radius

Radius. Aber d. n. 38. die Kugel stehet zu dem umbschriebenen Cylindrus, als die ungleiche Producenten / das ist / als $\frac{1}{3}$ des Radius gegen $\frac{1}{2}$ Radius, oder als $\frac{2}{6}$ gegen $\frac{3}{6}$ oder als 2. gegen 3. W. Z. B. W.

Die Kugel Fig. 28. stehet zu dem Cubus ihres diameters / als das $\frac{1}{6}$ der Circumferenz ihres grossen Circkels zu ihrem diameter. 567

Dann wir haben gesagt d. n. 541. und 553. daß die Producenten der Kugel seynd das Drittel des Radius oder das $\frac{1}{6}$ des diameters / der diameter / und die circumferenz ihres grossen Circkels; oder welches ein Ding ist / der diameter / der diameter / und das $\frac{1}{6}$ der circumferenz ihres grossen Circkels: Und die Producenten des Cubus seynd / der diameter / der diameter / der diameter; Ergo d. n. 38. so stehet die Kugel zu dem Cubus ihres diameters / als die ungleiche Producenten / das ist / als das $\frac{1}{6}$ der circumferenz eines grossen Circkels gegen ihrem diameter.

Woraus folget / daß weil die circumferentz des Circkels zu dem diameter stehet als 22 zu 7. oder als 66. zu 21/ wie n. 522. gesagt/ so stehet die Kugel zu dem Cubus des diameters als 11. gegen 21. oder näher als 355. gegen 678. wann man nehmlich setzet / daß die circumferentz zu dem diameter stehet / als 355. gegen 113. oder endlich / als 314. gegen 600. gesetzt / wann die proportion ist als 314. gegen 100.

Finis Elementorum Geometriæ.

Zum Ersten mahl gedruckt den 29. Julii, 1706.

Register der Bücher und Capittel.

Erstes Buch.

De proportionibus, oder von den Ebenmäßigkeiten. 1.

Cap. I. Vorbereitungs-Capittel. Von der Art und Weise die Species der Arithmetica zu practiciren / mit solchen Grössen / die mit Buchstaben bezeichnet seynd / nach Art der neuen Analysis oder Algebra, so weit nehmlich uns dieses hier nöhtig seyn kan. 2.

II. Von dem Gantzen und dessen Theilen. - - 10.

III. Von den Verhaltnüssen / und von der Ebenmäßigkeit oder proportion. 12.

IV. Von der Art zwo Grössen zu verändern / ohne daß ihre Verhaltnuß verändert werde. - - 19.

V. Eigenschafften der Ebenmäßigkeiten und proportion. - 25.

VI. Art und Weise vier ebenmäßige Grössen / auff unterschiedene Weise zu vergleichen / also daß allezeit eine proportion unter ihnen bleibe. - - 33.

VII. Von der Progression, oder gebundenen Ebenmäßigkeit. - 35.

Problemata, oder Werckstücke / betreffend die Geometrische progression. - 38.

VIII.

VIII. Von der Arithmetischen Verhaltnuß und Progression. - 40.
Werckstücke derselben. - 43.
Auslegung einiger Zeichen / die wir in folgenden Büchern auch brauchen wollen. - - - 47.

Zweites Buch. 49.

Cap. I. Von den Linien insgemein. 50.
II. Von den Circkel-Linien. 52.
III. Von den Winckeln. - 58.
IV. Von der Bleyrechten oder Perpendicular-Linie. - - 62.
V. Von den Parallel-Linien. 68.
VI. Von den Linien die in und aus dem Circkel gezogen werden. - 75.
VII. Von den proportional-Linien. 85.

Drittes Buch. 95

Von den flachen Figuren / betrachtet nach ihrem Umkreiß / und den Linien die man drinnen ziehen kan.

Cap. I. Von den flachen Figuren insgemein. - - - 96.
II. Von denen Triangeln. - 99.
III. Von den viereckichten Figuren. - - - 110.
IV. Von denen Viel-Ecken. - 113.

V. Von

V. Von denen gleichförmigen Figuren. - - - 123.

Vierdtes Buch.

Von den flachen Figuren / betrachtet nach ihrem Inhalt / oder nach dem Raum den sie einschliessen. - - - - 131.

Cap. I. Von den Untheilbaren Theilen in den Flächen. - - 132.
II. Von der Gleichheit der flachen Figuren / nach ihrem inwendig begriffenen Raum betrachtet. - - 135.
III. Von dem Maaß des Raums der flachen Figuren. - 140.
IV. Von der Verhältnus der flachen Figuren gegen einander / in Ansehung ihres eingeschlossenen Raums. - 144.

Fünfftes Buch. 155

Von denen mit Flächen anstossenden Linien.

Cap. I. Von der Fläche und geraden Linie ins gemein. - - 156.
II. Von den Linien die auf eine Fläche perpendicular oder schief gezogen werden. 160
III. Von den Flächen die einander durchschneiden. - - - 165.

IV. Von

IV. Von den Linien und Flächen die mit einerandern Fläche Parallel seynd. 166.
V. Von denen dichten Winckeln oder angulis solidis. - - 172.

Sechstes Buch. 176

Cap. I. Von denen Cörpern insgemein 176
II. Von der Oberfläche der Cörper. 179
III. Von der Oberfläche der Eck-Seule und der runde Seule / oder der Primadis und des Cylindri. - - 183.
IV. Von der Oberfläche des Eck-Kegels und des runden Kegels / oder der Pyramis und des Conus. - 186.
V. Von der Gleichheit / und von dem Maaß der Oberfläche der Cörper. 189.
VI. Von der Verhaltnüß der Oberfläche der Cörper. - - 198.

Siebendes Buch. 200

Von den Cörpern oder dichten Figuren / betrachtet nach ihrem Cörperlichen Inhalt.

Cap. I. Von den Untheilbaren Theilen in den Cörpern. - - 200.
II. Von den dichten Figuren. 202
III. Von dem Maaß der dichten Figuren. - - 209.
IV. Von der Vergleichung und Verhaltnus der Cörper. - - 214.

Regi-

Register.

Wo man in diesen Elementis die vornehmste Vorträge des Euclidis finden kan.

Euclidis Lib. I.

Propositiones Euclidis.	Numeri Elementorum.
4.	293.
5.	286.
6.	285.
8.	292.
9.	171.
10.	149.
11.	185.
12.	185.
13.	166. 167. 174.
14.	158.
15.	169.
16.	180.
18.	286.
19.	285.
22.	300.
23.	170.
24.	298.
25.	299.
26.	295.
27.	199. 200. 201.
28. 29.	205.
30.	452.
31.	206.
32.	226. 276. 280.
33.	203.
34.	313. 317.
35. 36.	379.
37. 38.	380.
41.	381.
47.	409.

Euclidis Lib. III.

3.	208. 209.
14.	210.
15.	211.
16.	212.
17.	232.
18.	213.
19.	214.
20.	219.
21.	222.

Propositiones Euclidis.	Numeri Elementorum.
31.	— 223. 224. 225.
32.	— — 220.
35.	— — 246.
36. 37.	— 250. 251.

Euclidis Lib. IV.

5.	— — 151.
6.	— — 339.
11.	— — 340.
15.	— — 337.

Euclidis Lib. V.

7.	— — 68.
8.	— — 69.
9.	— — 68
10.	— — 69.
11.	— — 70.
12.	— — 62.
14.	— — 67.
15.	— 64. 65.
16.	— — 81.
17.	— — 83.
18.	— — 82.
19.	— — 63.

Euclidis Lib. VI.

2.	— — 240.
3.	— — 463.
4.	— — 349.

Propositiones Euclidis.	Numeri Elementorum.
5.	— — 350.
6.	— — 351.
7.	— — 352.
8.	— 248. 223.
9.	— — 207.
10. & corollarium	207.
11.	— — 254.
12.	— — 253.
13.	— — 255.
14.	— — 404.
16.	— — 71.
17.	— — 72. 405.
18.	— — 367.
19. 20.	— — 407.
22.	— — 408.
23.	— — 400.
31.	— — 410.

Euclidis Lib. XI.

1.	— — 417.
2.	— — 422.
3.	— — 420.
6. umgekehrt	— 449.
8.	— — 450.
9.	— — 452.
10.	— — 452.
17.	— — 455.
18.	— — 441.
19.	— — 442.

Propositiones Euclidis.	Numeri Elementorum.	Propositiones Euclidis.	Numeri Elementorum.
21. —	— 462.	Euclidis Lib. XII.	
32. —	— 557.	1. —	— 407.
33. —	— 564.	2. —	— 407.
34. —	— 562.	7. —	— 533.
36. —	— 558.	11. Scholium.	— 560.
40. Scholium.	— 546.		

ERRATA, in der Vorrede.

Pag. 2. Lin. 26. mit grossen / leset / mit grossem. p. 4. l. 5. von allen / l. von aller. p. 4. l. 10. grössen / l. Grössen. p. 5. l. 14. dle / l. die. p. 6. l. 23. nach welche / l. nach welcher. p. 6. l. 24. völliger / l. völlig. p. 7. l. 26. drrchgangen / leset durchgegangen.

In dem Werck selbst.

Pag. 13. Lin. penult. seiner / leset einer. pag. 14. lin. 23. alle Sätze / l. alle beyde Sätze. P. 16. l. 9. klein / l. unendlich klein. p. 16. l. 10. gesetzet / l. geschätzet. p. 26. l. 21. dividiret haben / l. dividiret werden / so haben sie. p. 55. l. 16. andere / l. anderen. ibid. l. 21 eine / l. ein. p. 57. l. 4. von unten auf / d. n. 140. l. d. n. 141. p. 59. l. 12. puckellicht / l buckelicht. p. 61. 13. durch n. 165. l. durch n. 166. ibid. lin. 3. von unten auf / d. n. 138. l. d. n. 139. p. 63. l. 17. n. 173. l. 169. p. 64. n. 17. ⊥ CG. l. ⊥ CD. p. 66. l. 11. schieff auch gleich / l. auch gleich schieff. p. 67. l. 12. wann zwey / l. wann von zwey. p. 70. l. 2. beweise / l. beweisen. p. 70. l. 3. von unten / durchschneiden können / l. durchschneiden müssen. p. 71. l. 8. Raums / l. Raum. p. 72. l. 6. gegenüber-

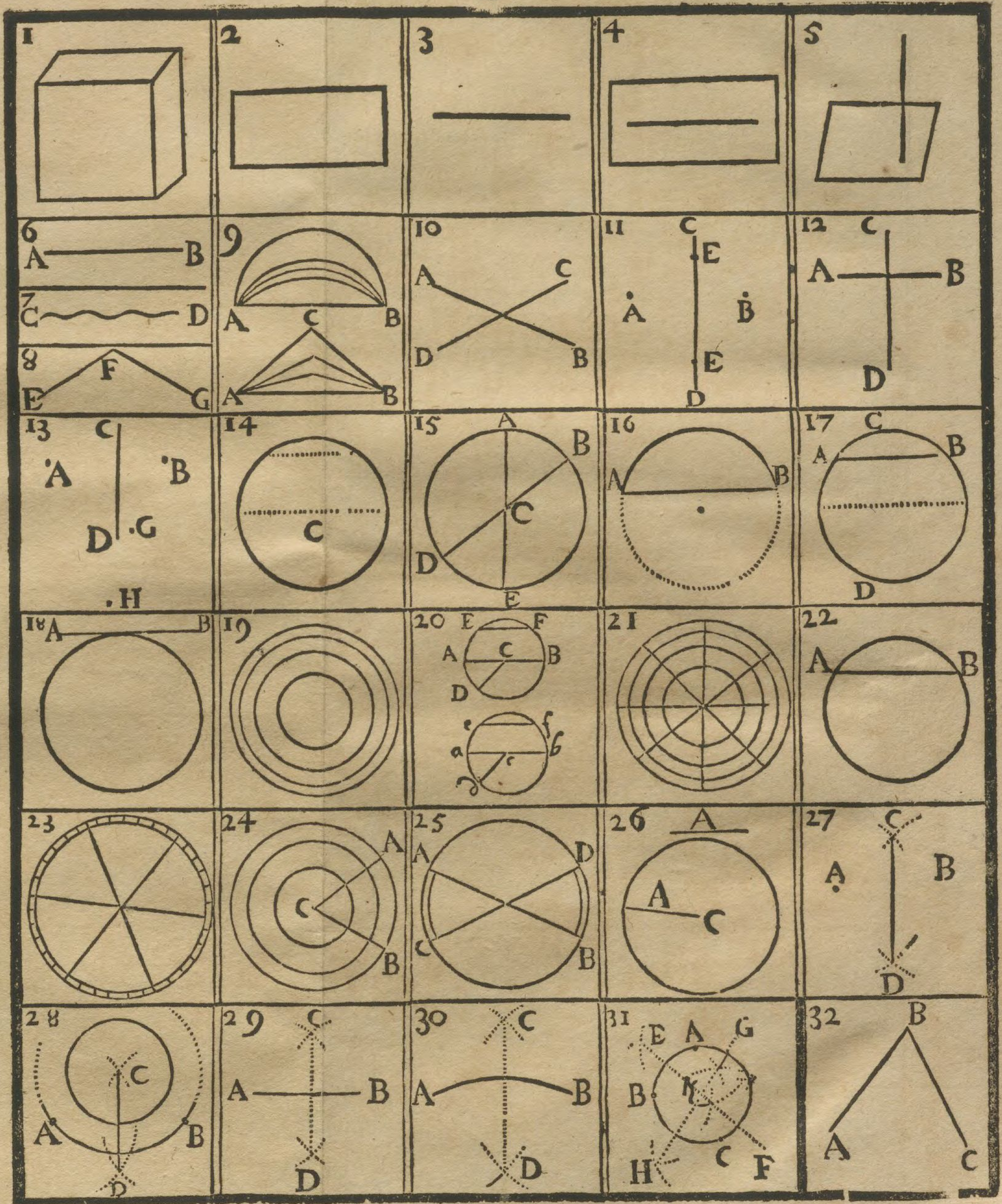
stehen-

stehenden EFB. l. gegenüberstehenden inwendigen EFB. p. 72. l. 18. und 19. seynd. Durch / l. seynd / durch. p. 75 l. 19. theilen wird / l. theilen werden: p. 77. l. 6. Diametro stehen / l. centro stehen. p 88. l. 24. AB. CD. den andern EF. GH. l. AB. EF. den andern CD. GH. ibid. l. 27. AB. EF. l. AB. CD. ib. l. 29. CD. GH l. EF. GH. ib. ult. der zweyen / l. von CD. CF. der zweyen. p. 89. l. 2. begriffe / l. begriffen. ib. l. 22. AB. AD. l. AB. AD: : p. 91. l. 18. Fig 113. l. Fig. 118. p. 91. l 25. Fig. 113. l. Fig. 118. p. 94. l. 16. dann DE. CE: : CE. FE. l. dann d. n. 248. DE. CE. &c. p. 97. l. ult. durch gegebene / l. durch die gegebene p. 100. l. 1. 2. Winckel / l. Circkel. p. 107. l. 1. einem △. l. einen △. P. 108. l. 3. stehet / l. stehet d. n. 286. p. 110. l. ult. eichnet / l. zeichnet. p. 119. l. 12. die zwo d. n. 279. △ l. die zween △ d. n. 279. p. 123. l. 6. Caput II. l. Caput VI. p. 126. l. 22. gleich seynd / l. gleichförmig seynd. p. 127. l. 22. seynd sie / l. so seynd sie. p. 136. l. 5. Parallelogr. ein / l. Parallelogr. d. n. 313. ein. p. 149. l. 3. so seyen / l. so seynd. p. 158. l. 27. Triangel ACB. l. Triangel AEB. P. 170. l. 20. ABCDEF. l. ABC. DEF. p. 174. l. 15 und 16. ist der auch / l. ist auch der. p. 179 im Tit. des Cap. der Kugel / l. der Cörper. p 188 l. 17. Seiten / l. Seiten ist. p. 193. l. 21. MD. SR. l. MD: : SR. p. 198. l. 10 Höhe AE. l. Höhe AG. p. 201. l. 23. ein Zwiebel / l. eine Zwiebel. p. 204. l. 8. d. n. 526. l. d. n. 527. p. 207. l. 22. fie / l. sie. im Register der Capittel soll zwischen pag. 113. und 123. dieses stehen. V. von den Regular-Viel-Ecken. — 115.

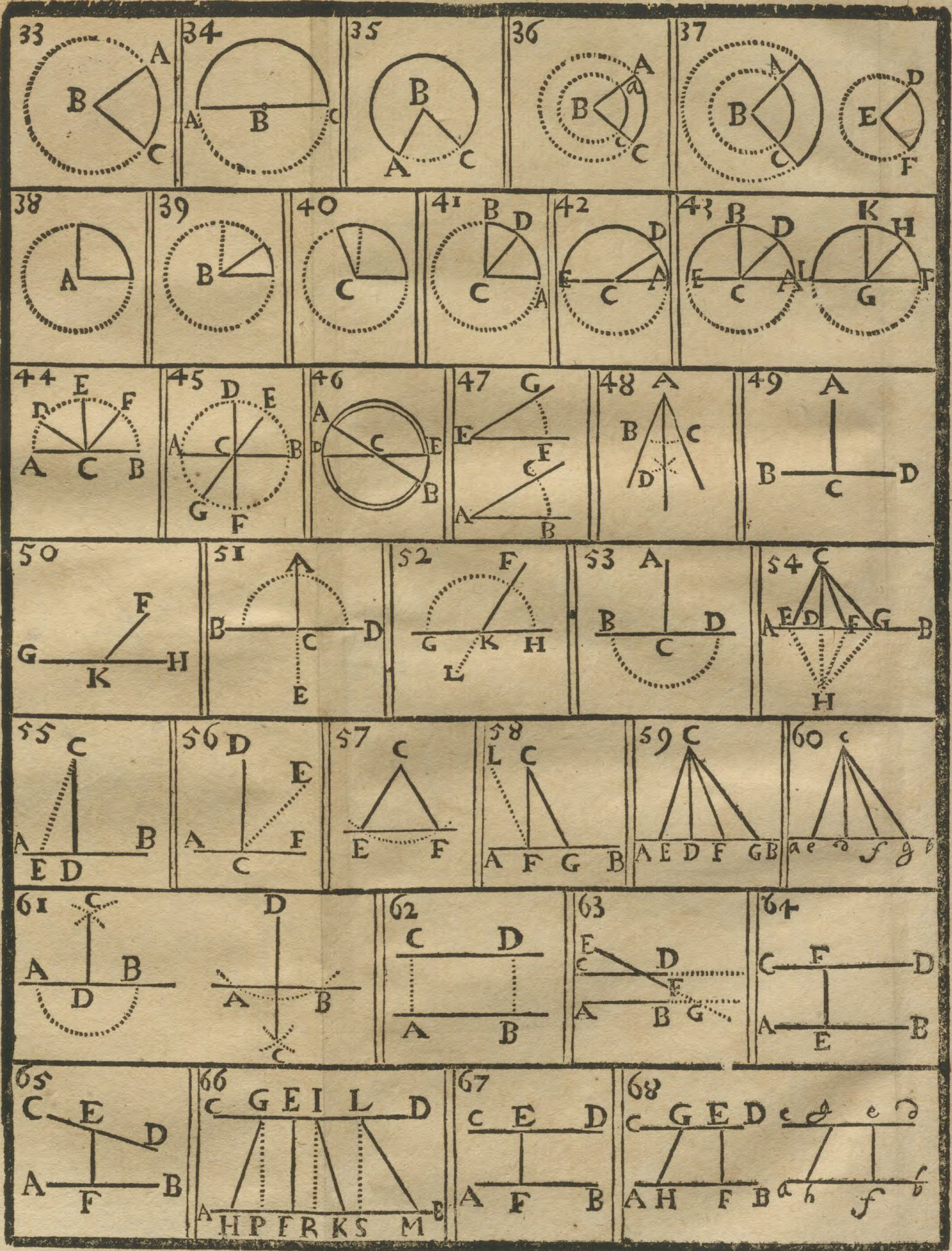
Das erste Buch hat keine Figuren.

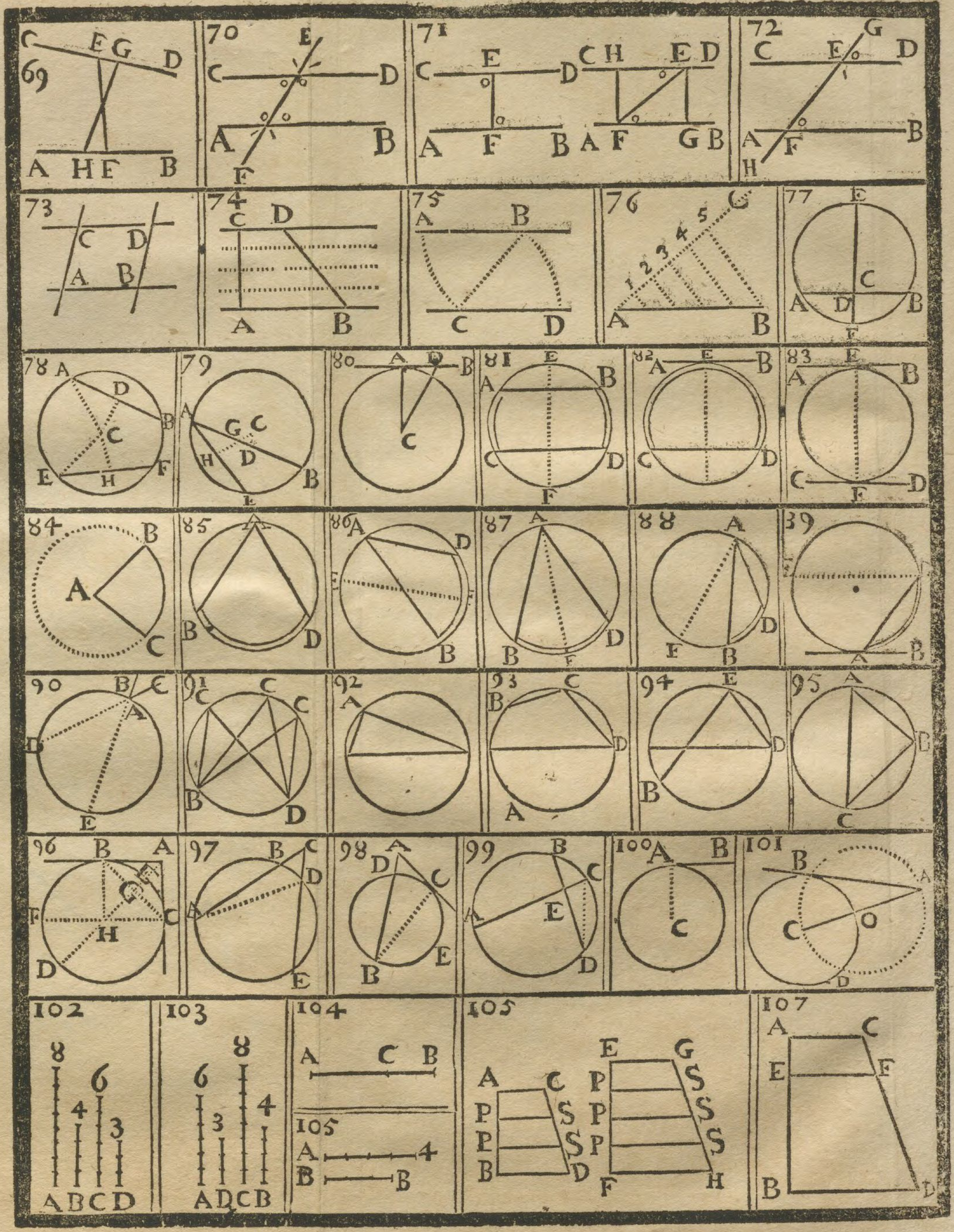
FIGURA ELEMENTORUM Lib. II.

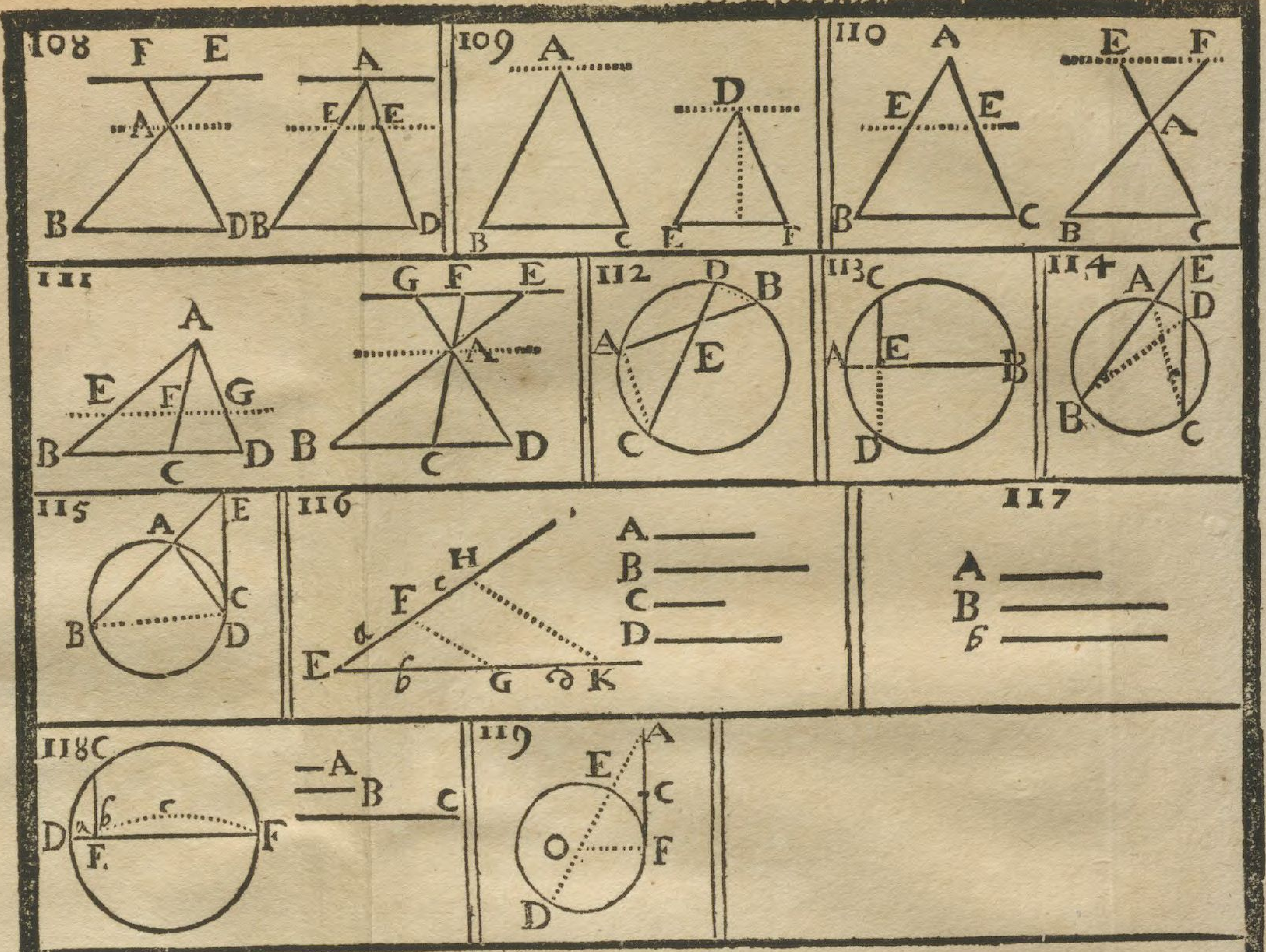
I.



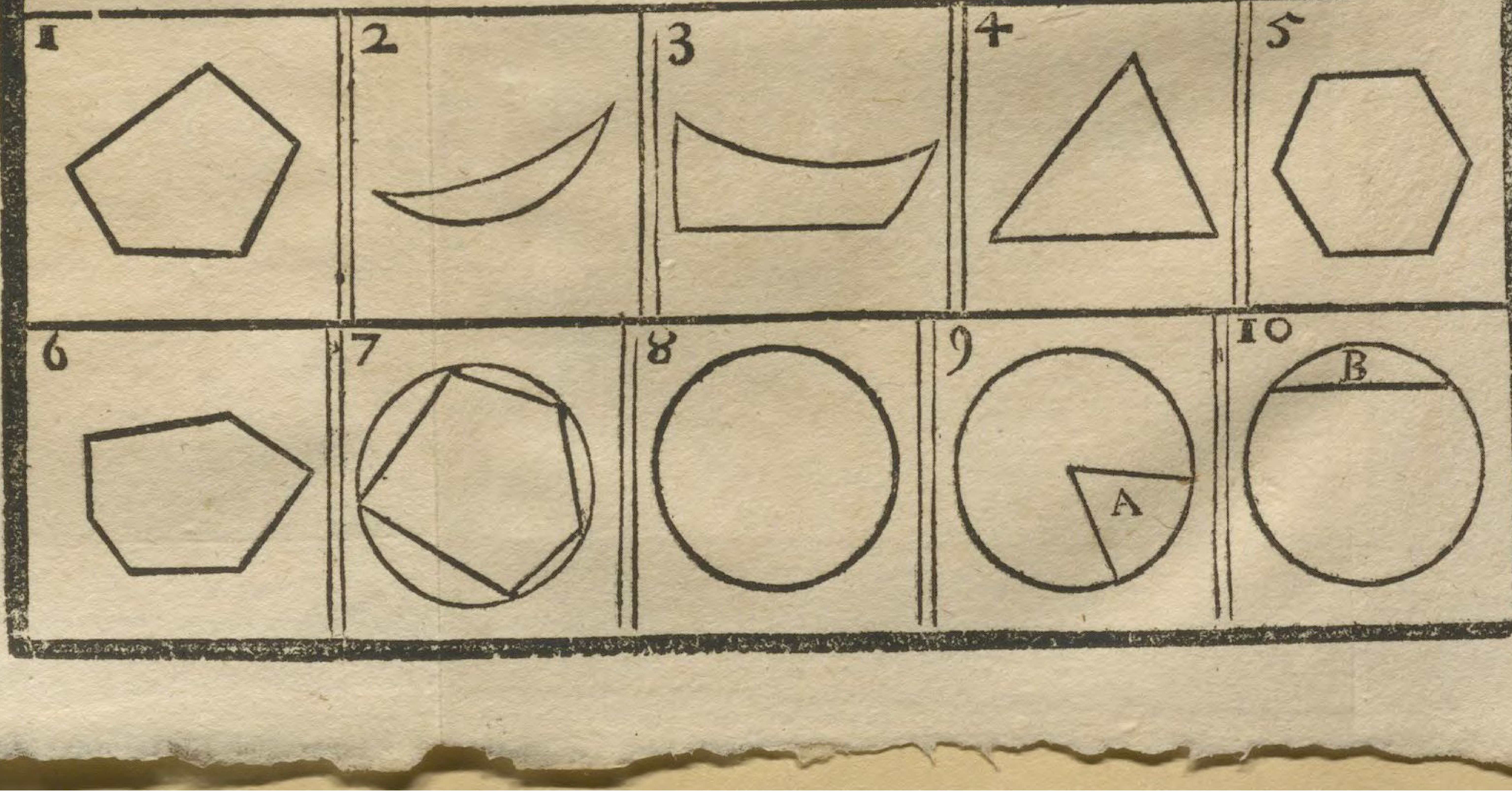
B
B
B
B
B

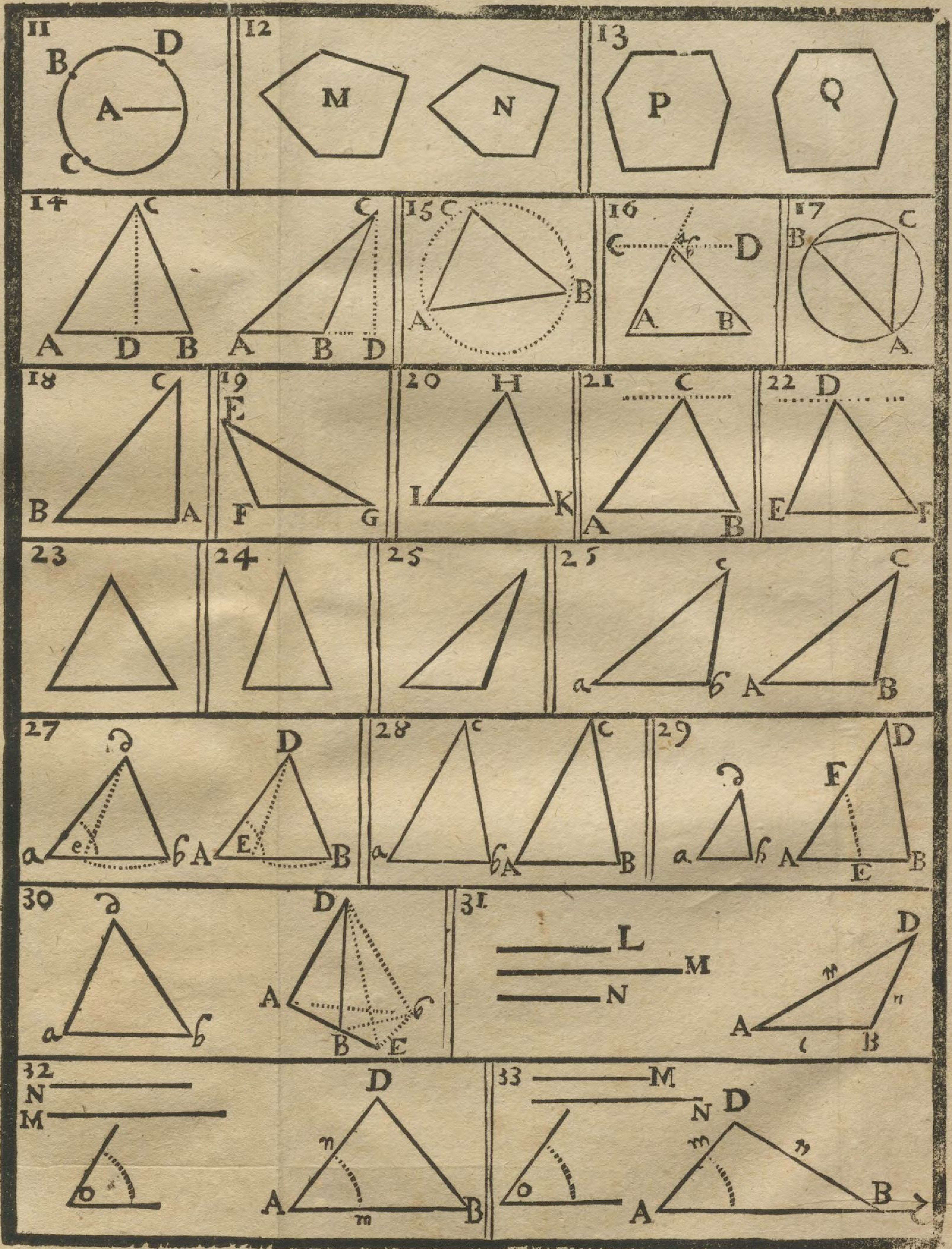

33 A B C
34 A B C
35 B A C
36 A a B c C
37 A B C D E F
38 A
39 B
40 C
41 B D C A
42 D E C A
43 B D E C A K H G F
44 E D F A C B
45 D E A C B G F
46 A C D E B
47 G E F C A B
48 A B C D
49 A B C D
50 F G K H
51 A B C D E
52 F G K H L
53 A B D C
54 C A E D F G B H
55 C A B E D
56 D E A F C
57 C E F
58 L C A F G B
59 C A E D F G B
60 c a e d f g b
61 C A B D D A B C
62 C D A B
63 E D C F A B G
64 C F D A E B
65 C E D A F B
66 C G E I L D A H P F R K S M E
67 C E D A F B
68 C G E D A H F B

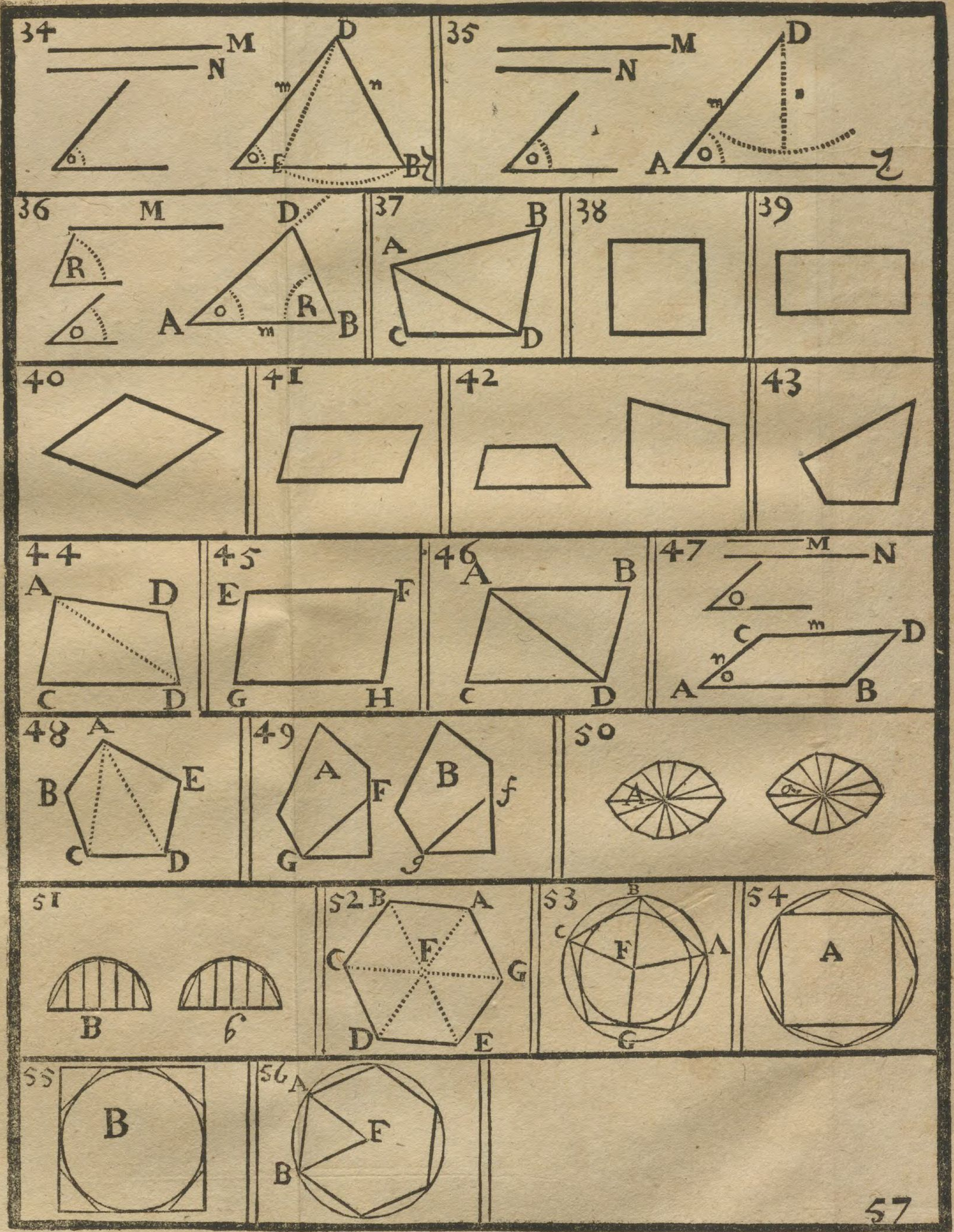

69 C E G D A H F B
70 E C D A B F
71 C E D A F B C H E D A F G B
72 G C E D A B H F
73 C D A B
74 C D A B
75 A B C D
76 1 2 3 4 5 G A B
77 E C A D B F
78 A D C B E H F
79 A G C H D B E
80 A D B C
81 E A B C D F
82 E A B C D
83 E A B C D F
84 B A C
85 A B D
86 A D B
87 A B F D
88 A D F B
89 A B
90 B C A D E
91 C C C B D
92 A
93 B C D A
94 E D B
95 A B C
96 B A F G F C H D
97 B C D A E
98 A D C B E
99 B C A E D
100 A B C
101 B A C O D
102 8 6 4 3 A B C D
103 8 6 4 3 A D C B
104 A C B
105 A 4 B B
105 A C P S P S P S B D E G P S P S P S F H
107 A C E F B D

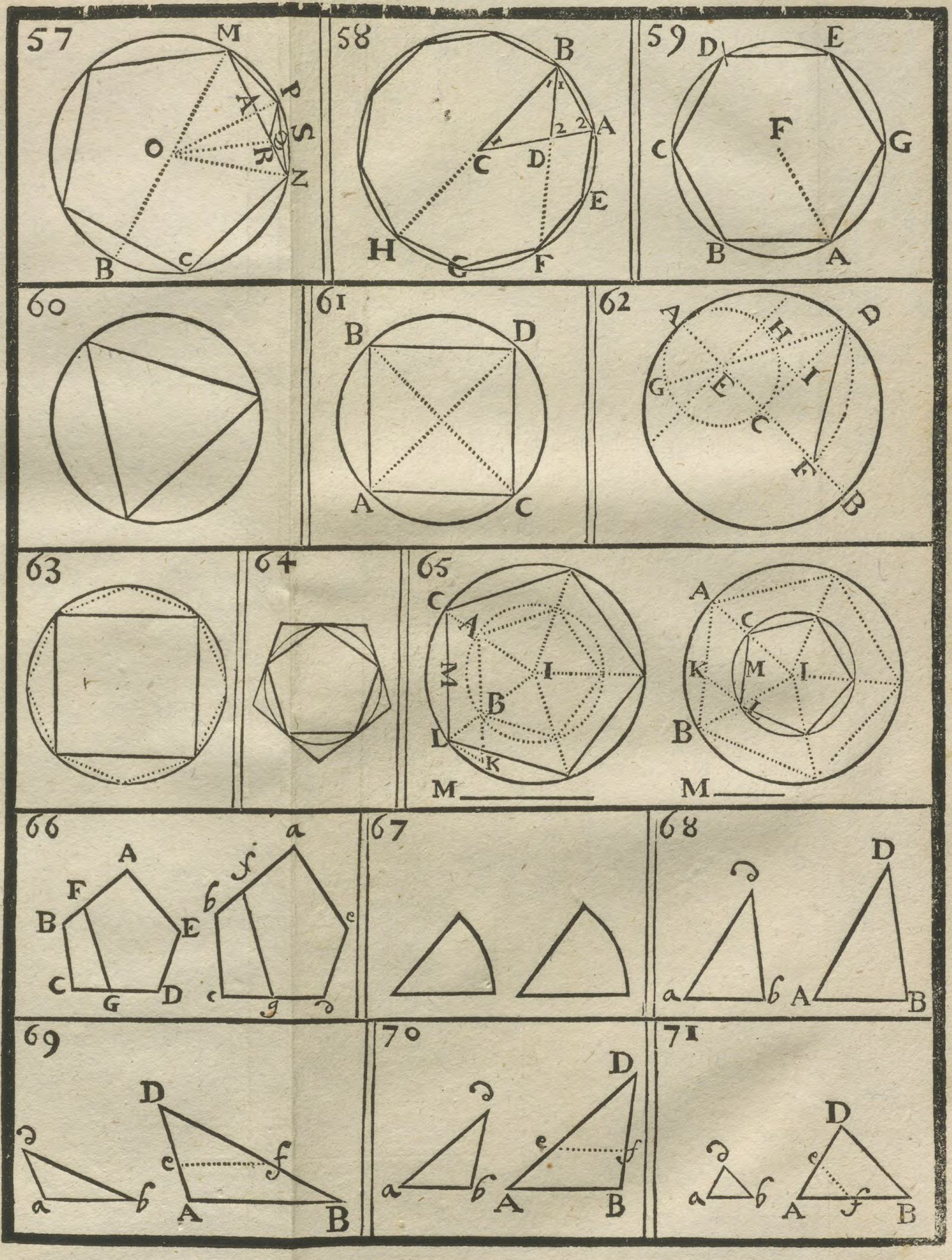


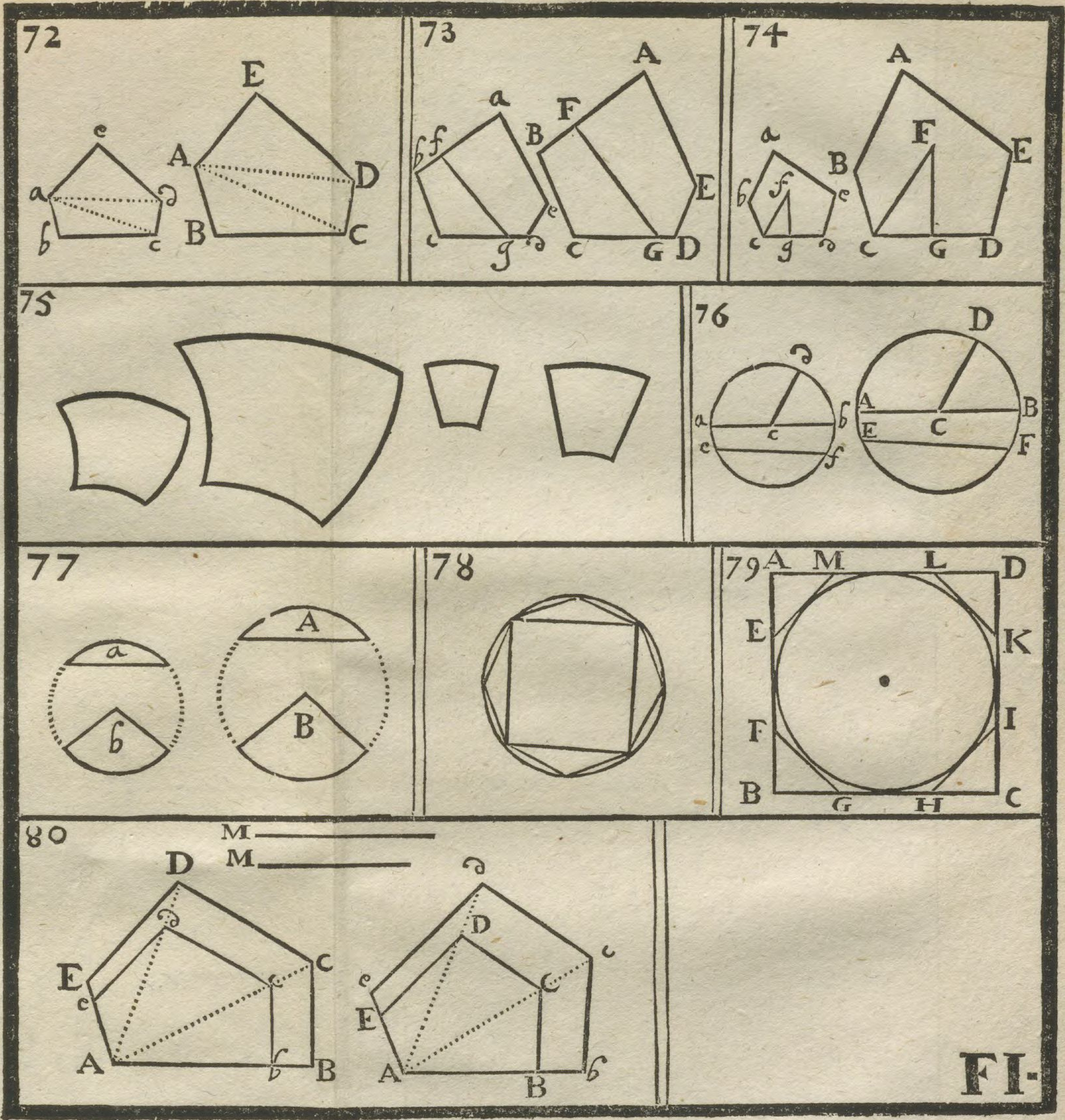
FIGURÆ ELEMENTORUM LIB. III.




11
B D A C
12
M N
13
P Q
14
C A D B
C A B D
15
C B A
16
C D A B
17
B C A
18
C B A
19
E F G
20
H I K
21
C A B
22
D E F
23
24
25
25
c a b
C A B
27
D a e b A E B
28
c a b
C A B
29
a b
D F A E B
30
a b
D A B E
31.
L M N
D A B
32
N M
D A B
33
M N D A B


34 M N D m n o E B
35 M N D m o A
36 M D R o A m B
37 B A C D
38
39
40
41
42
43
44 A D C D
45 E F G H
46 A B C D
47 M N o C m D n A B
48 A B E C D
49 A F G B f g
50 A
51 B b
52 B A C F G D E
53 B C F A G
54 A
55 B
56 A F B

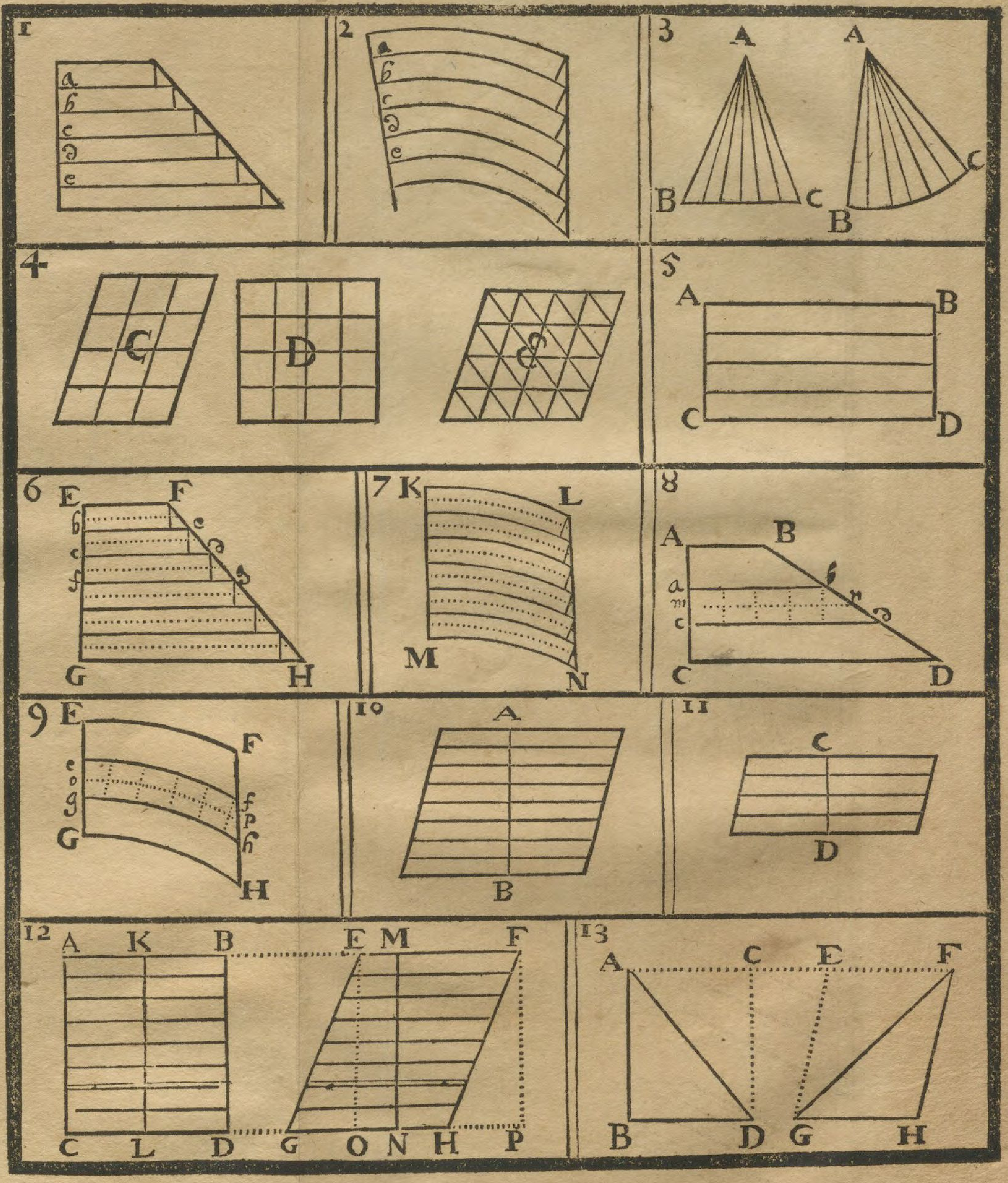

57
M
P
S
N
A
R
O
B
C
58
B
A
C
D
E
H
G
F
59
D
E
F
C
G
B
A
60
61
B
D
A
C
62
A
H
D
G
E
I
C
F
B
63
64
65
C
A
M
I
B
D
K
M
A
C
K
M
I
L
B
M
66
A
F
B
E
C
G
D
a
f
b
e
c
g
d
67
68
d
a
b
D
A
B
69
D
d
e
f
a
b
A
B
70
D
d
e
f
a
b
A
B
71
D
d
e
a
b
A
f
B



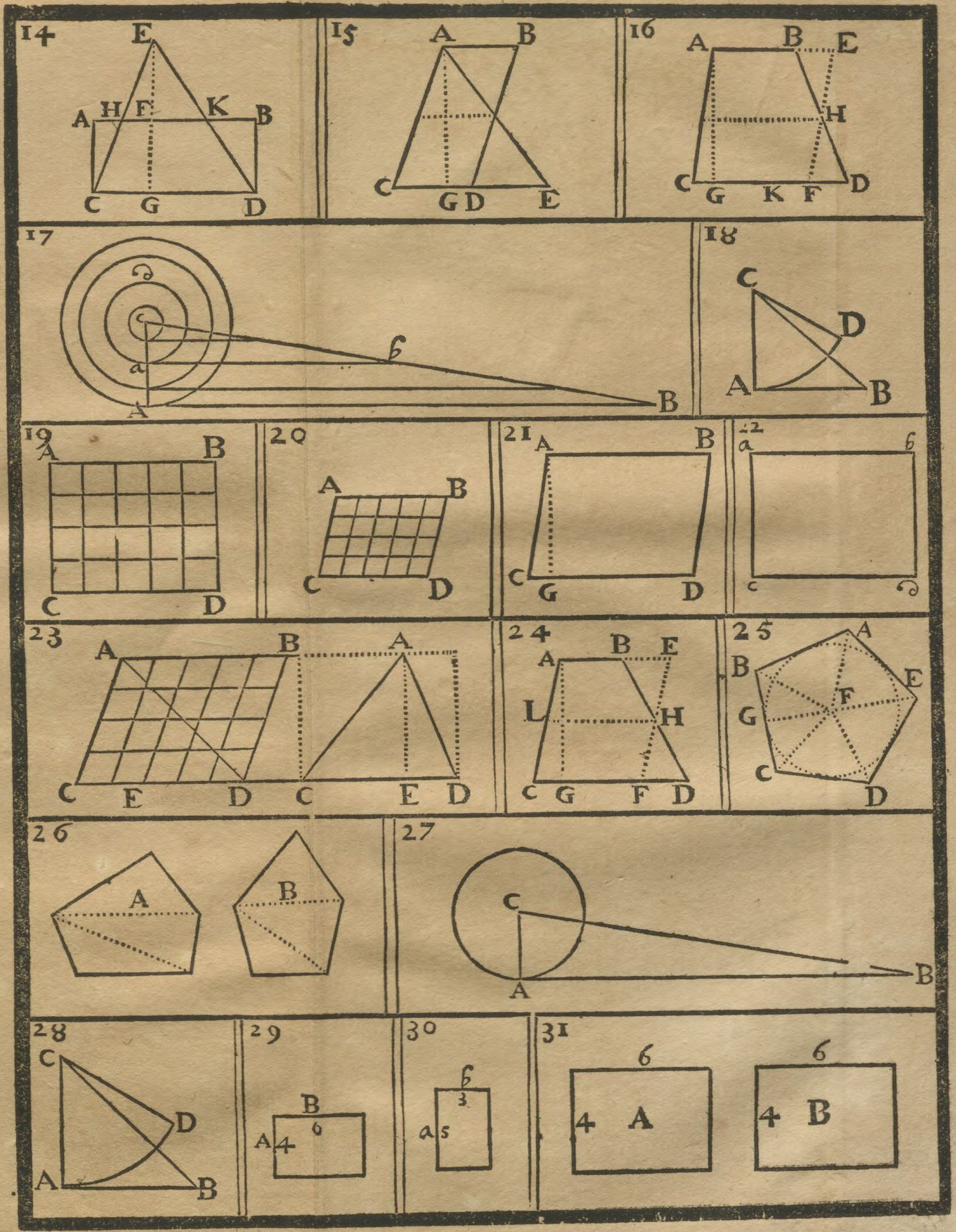
FI-

FIGURA ELEMENTORUM LIB. IV.

IX.



X.


14 E A H F K B C G D
15 A B C G D E
16 A B E H C G K F D
17 B
18 C D A B
19 A B C D
20 A B C D
21 A B C G D
22
23 A B A C E D C E D
24 A B E L H C G F D
25 A B E F G C D
26 A B
27 C A B
28 C D A B
29 B A 4 6
30 6 3 a 5
31 6 4 A 6 4 B

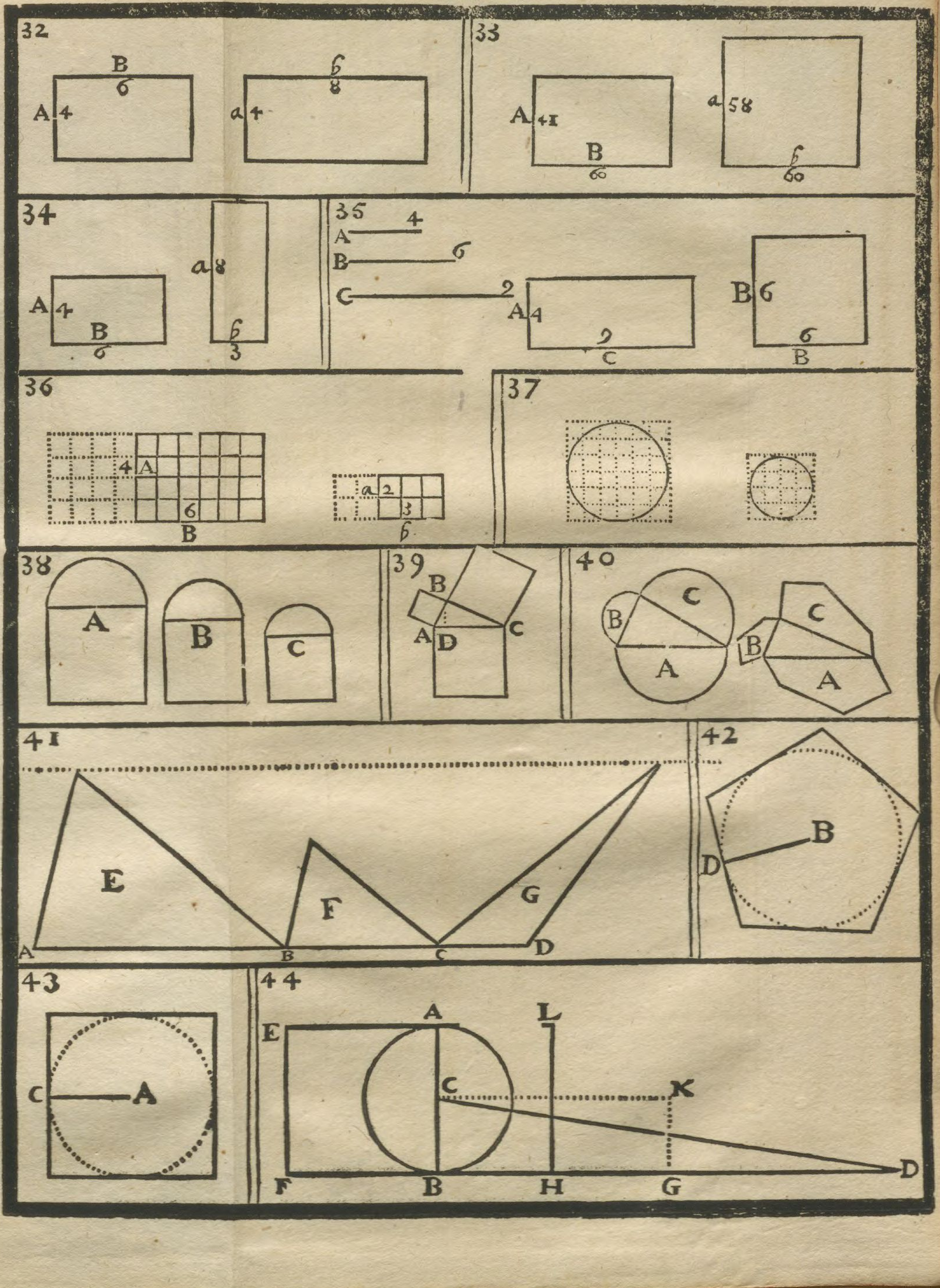
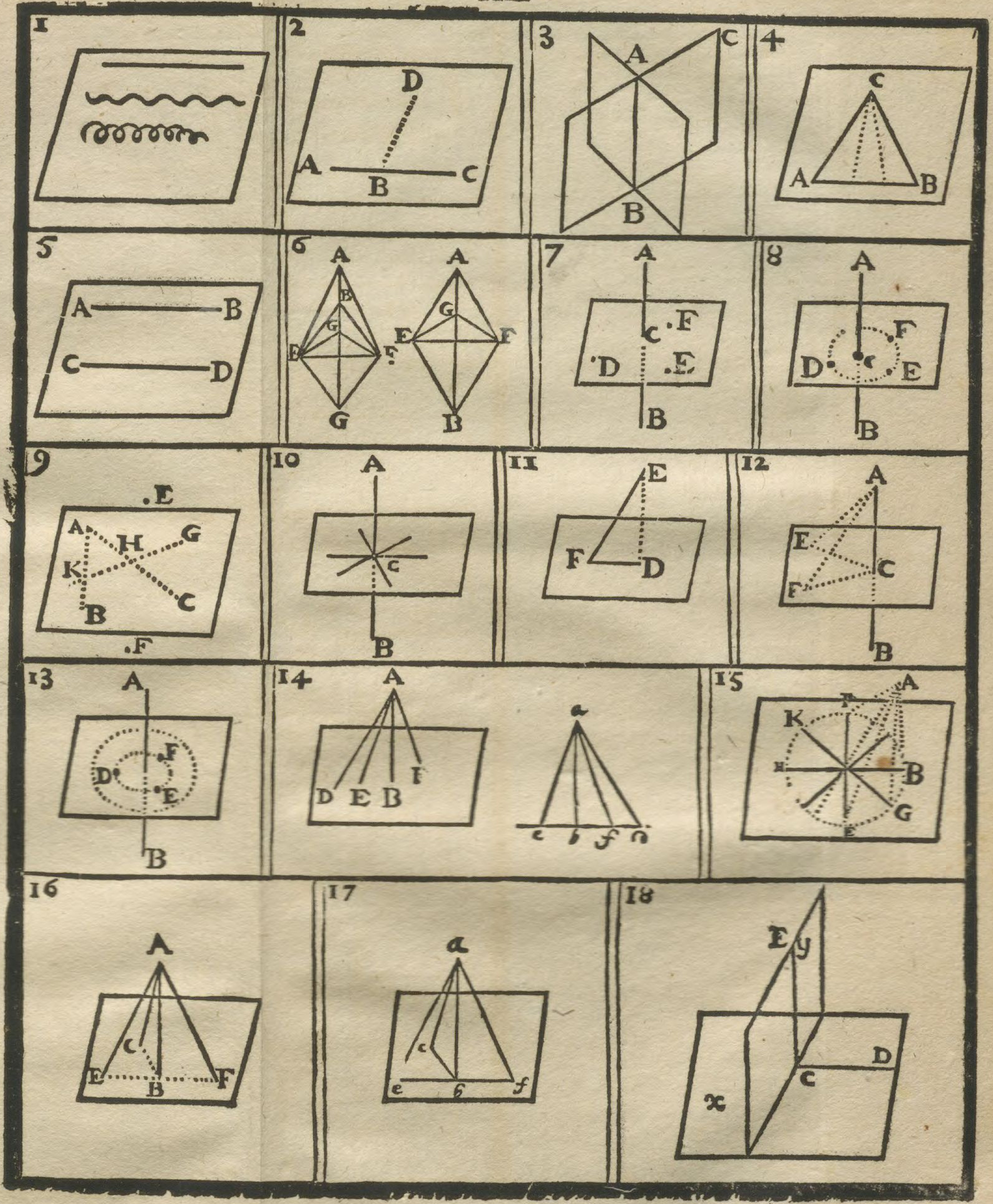
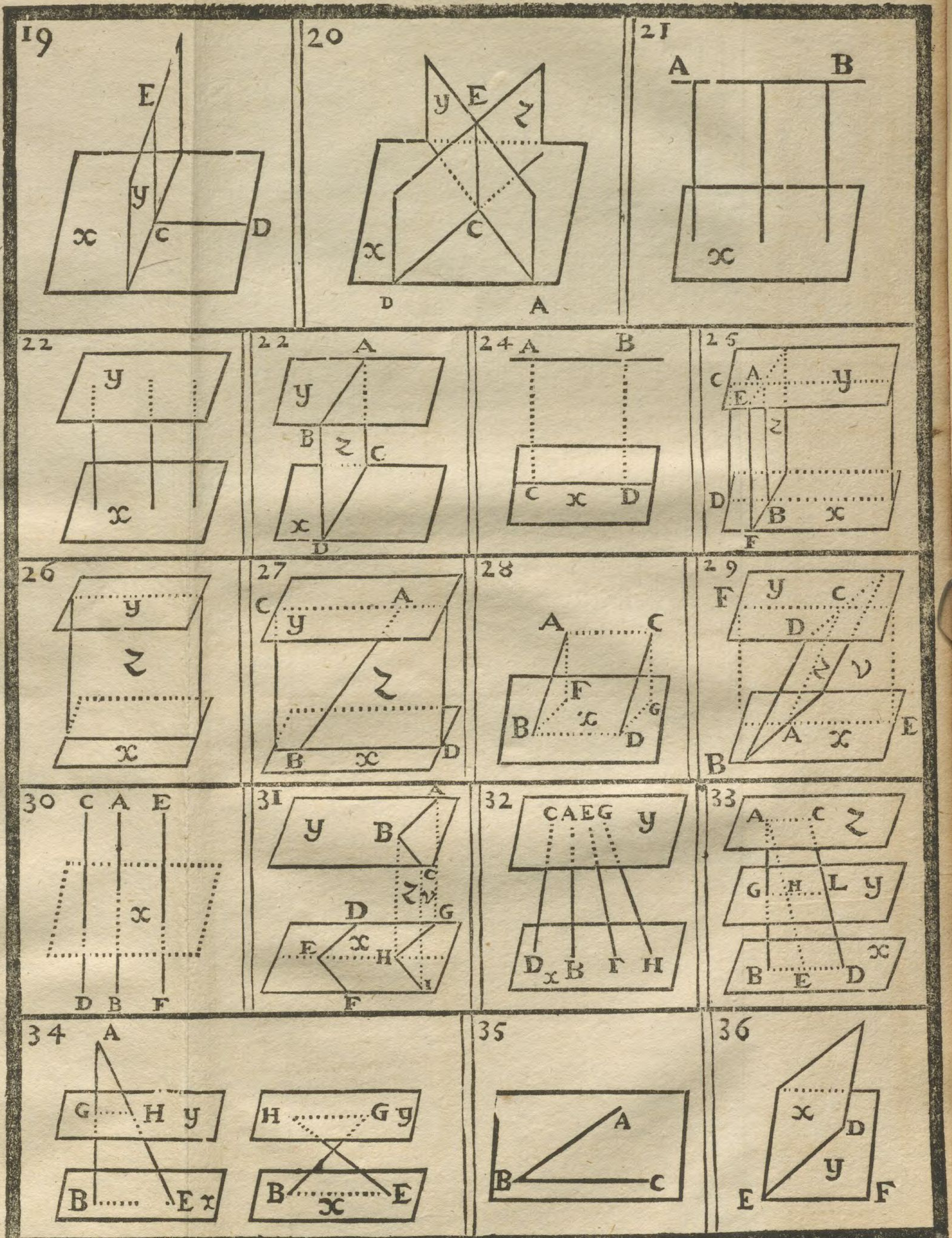
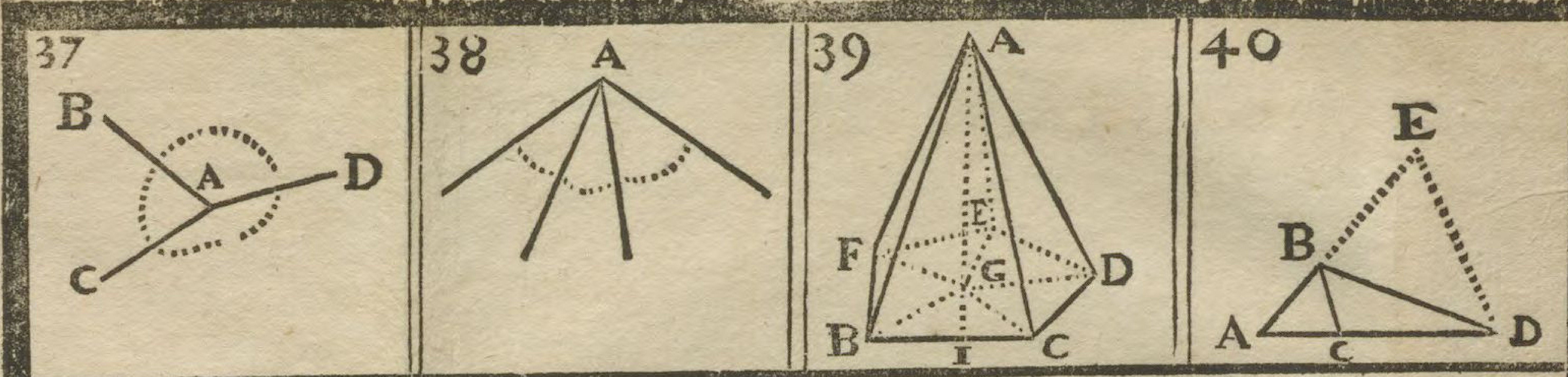

32
B
6
A 4
6
8
a 4
33
A 41
B
60
a 58
b
60
34
A 4
B
6
a 8
b
3
35
A 4
B 6
C 9
A 4
9
C
B 6
6
B
36
4 A
6
B
a 2
3
b
37
38
A
B
C
39
B
A
D
C
40
B
C
A
B
C
A
41
E
F
G
A
B
C
D
42
B
D
43
C
A
44
A
L
E
C
K
F
B
H
G
D

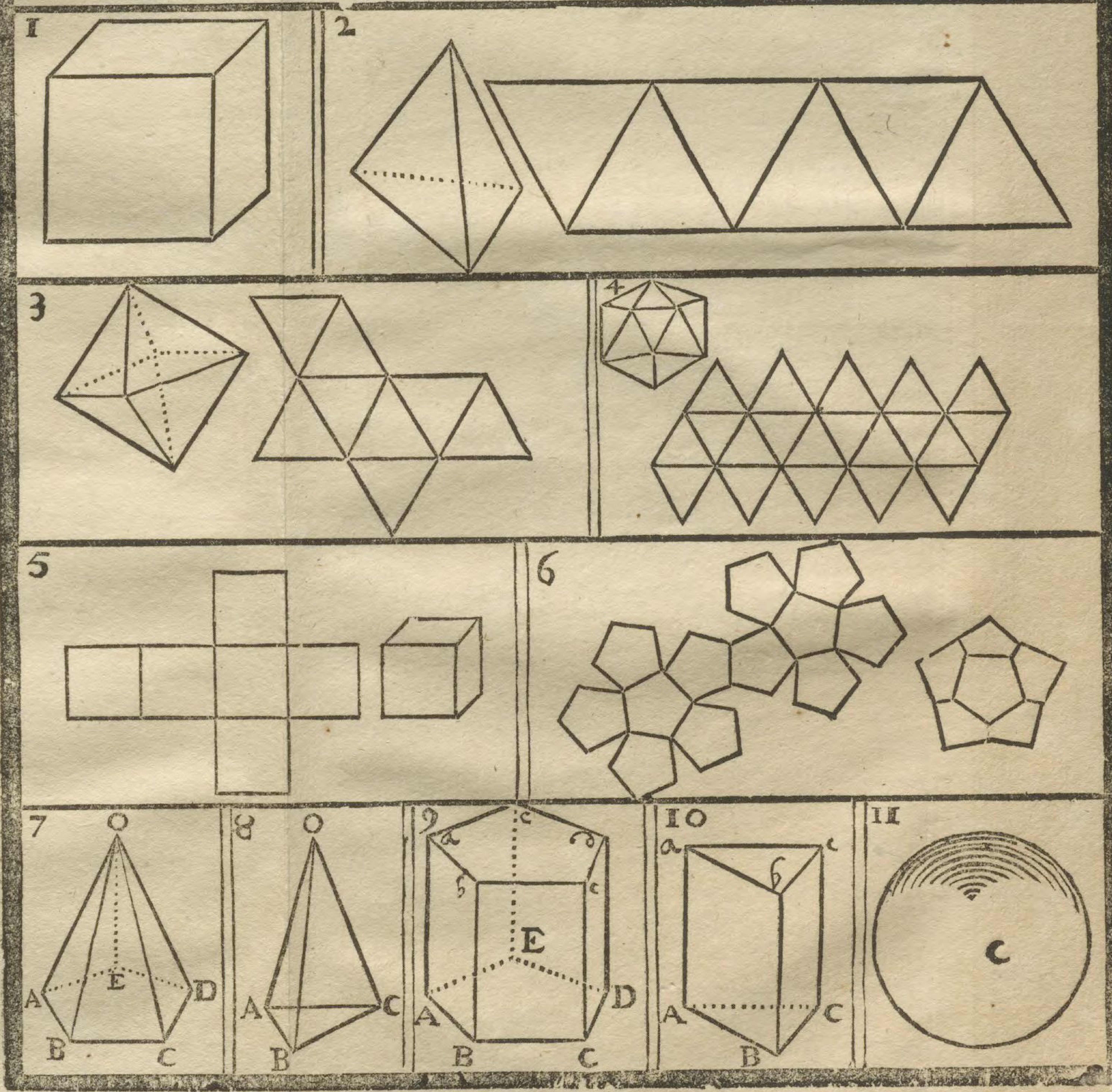
FIGURA ELEMENTORUM LIB. V.
XII.

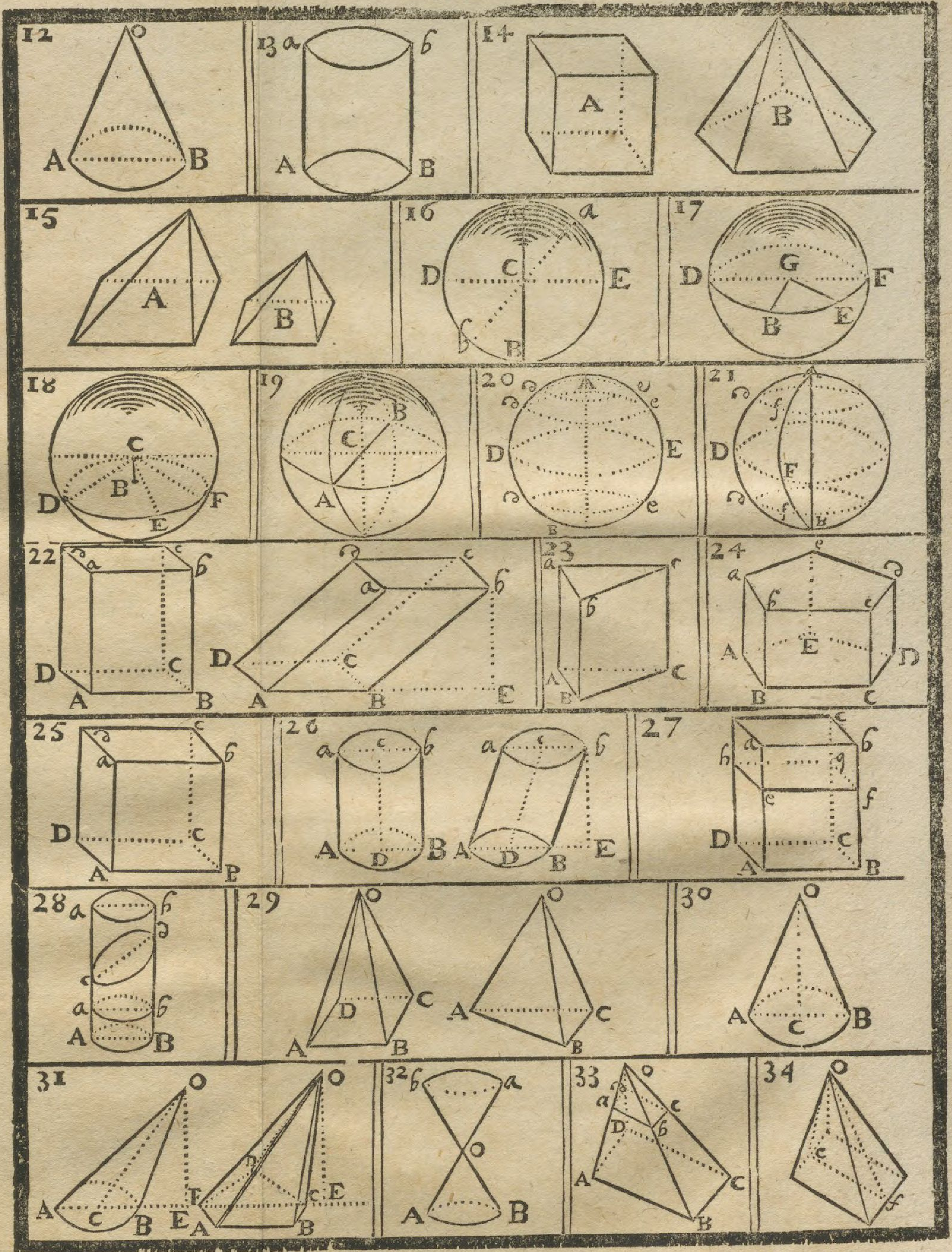


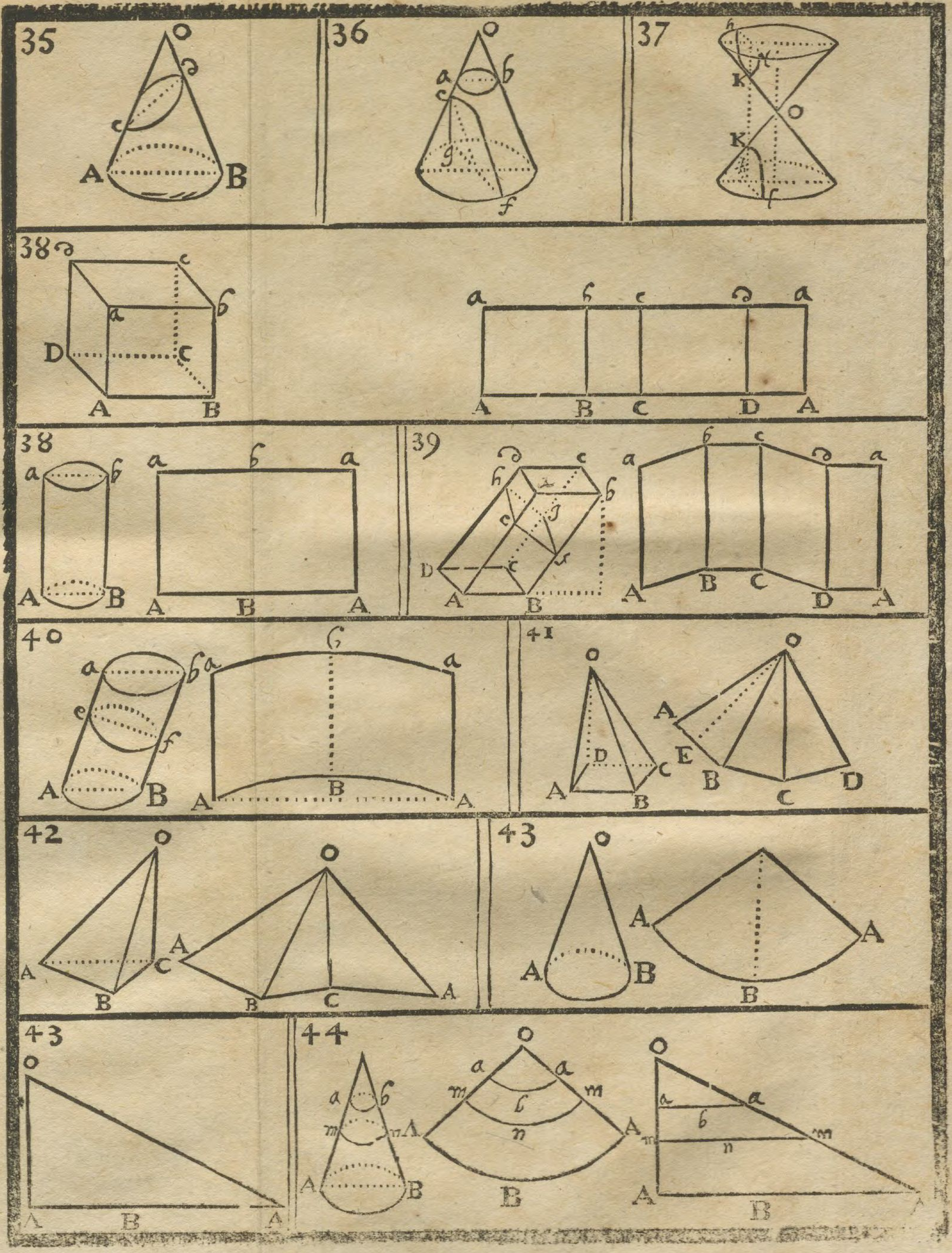

19 E y x c D
20 y E z x C D A
21 A B x
22 y x
22 A y B z C x D
24 A B C x D
25 C A E y z D B x F
26 y z x
27 C A y z B x D
28 A C F x G B D
29 F y C D z v A x E B
30 C A E x D B F
31 A y B C z v G D E x H I F
32 C A E G y D x B Γ H
33 A C z G H L y B E D x
34 A G H y B E x
H G y B x E
35 A B C
36 x D y E F



FIGURÆ ELEMENTORUM LIB. VI.




12 O A B
13 a b A B
14 A B
15 A B
16 a D C E b B
17 D G F B E
18 C D B F E
19 B C A
20 A D E e B
21 D F f B
22 a c b D C A B
a c b D C A B E
23 a c b A B C
24 c a b c E A D B C
25 a c b D C A P
26 a c b A D B a c b A D B E
27 c a b h g f e D C A B
28 a b a b A B
29 O D C A B O A C B
30 O A C B
31 O A C B E O T A B c E
32 b a O A B
33 O a c D b A C B
34 O e f


35
36
37
38
38
39
40
41
42
43
43
44

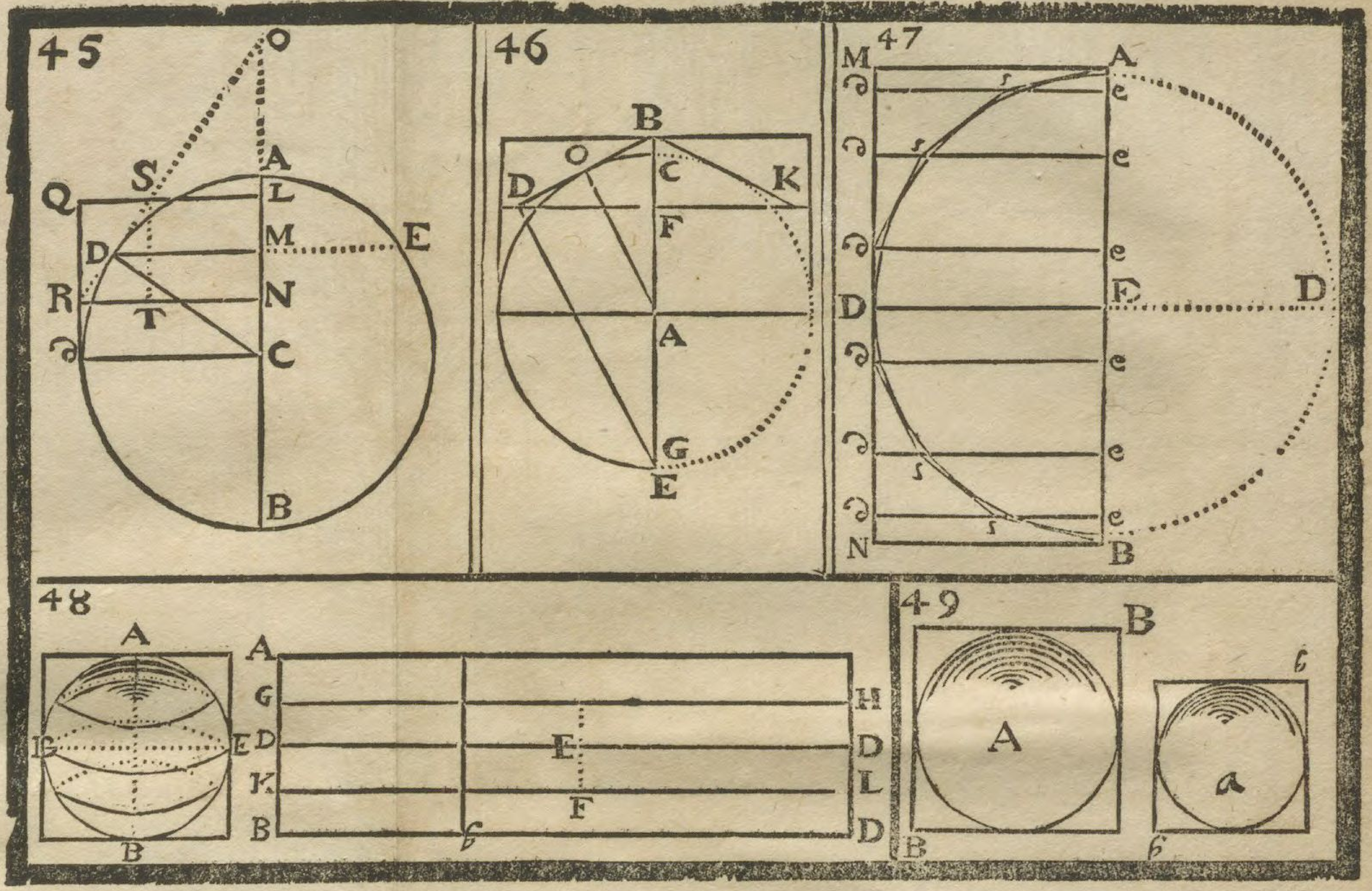
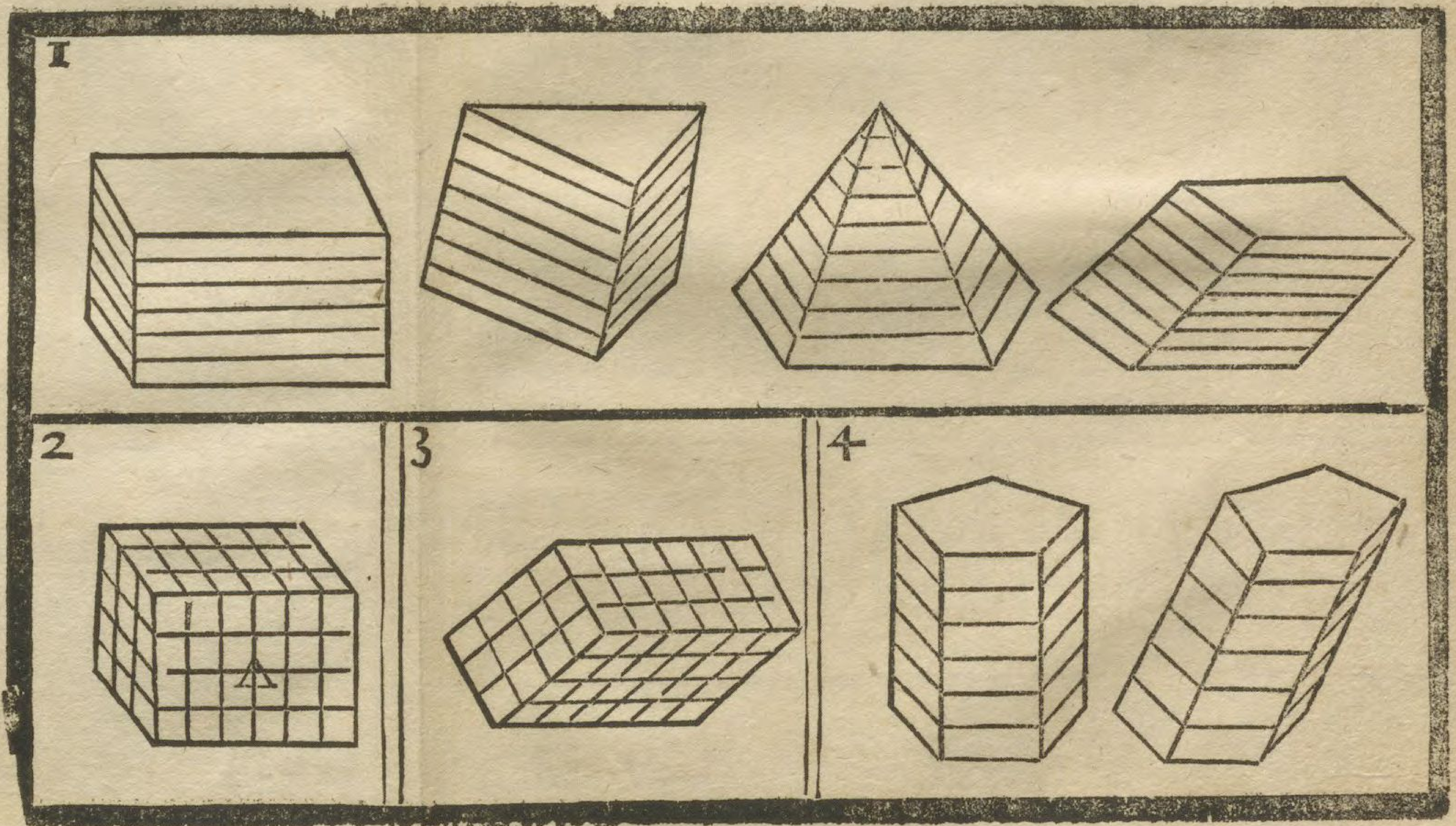
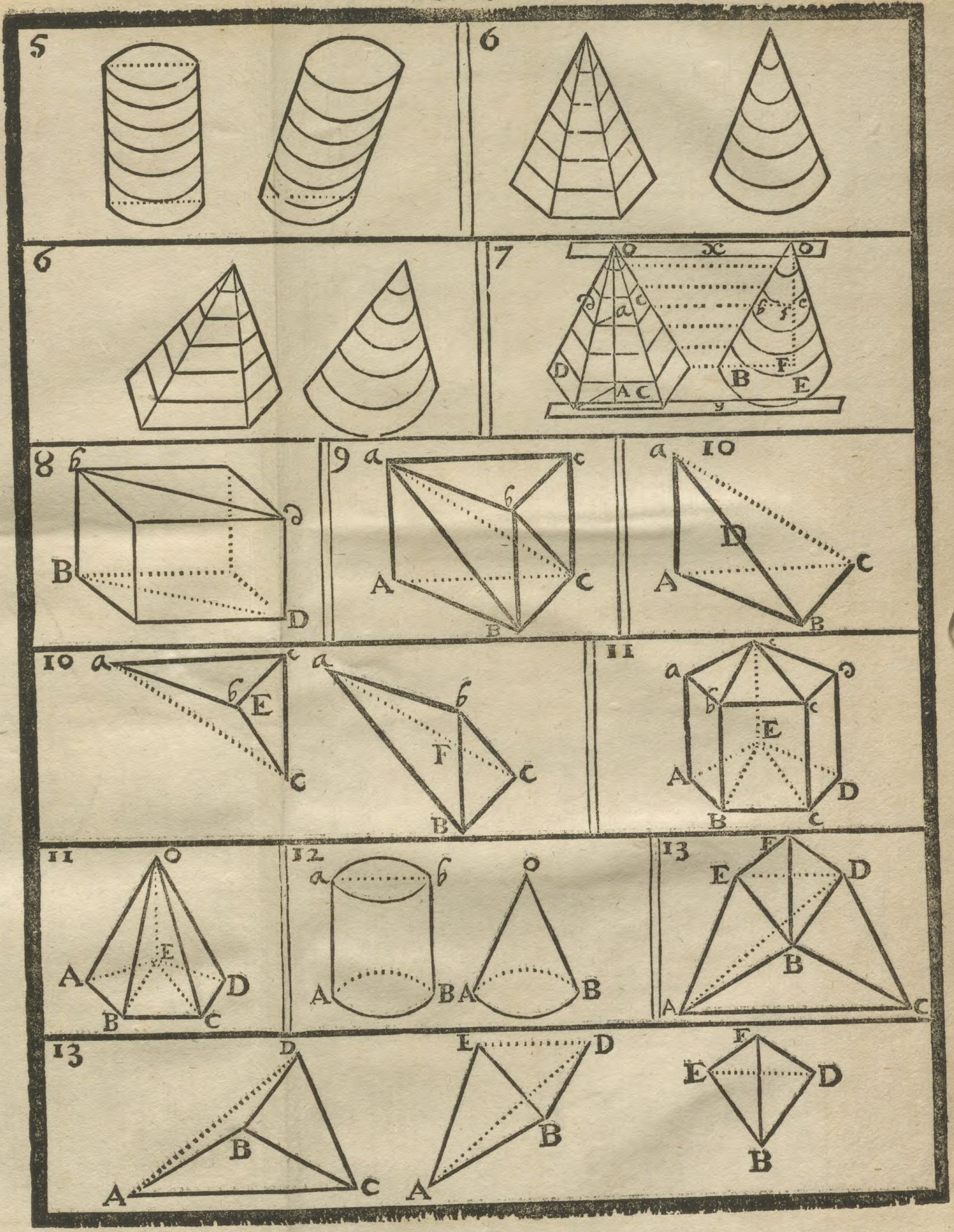
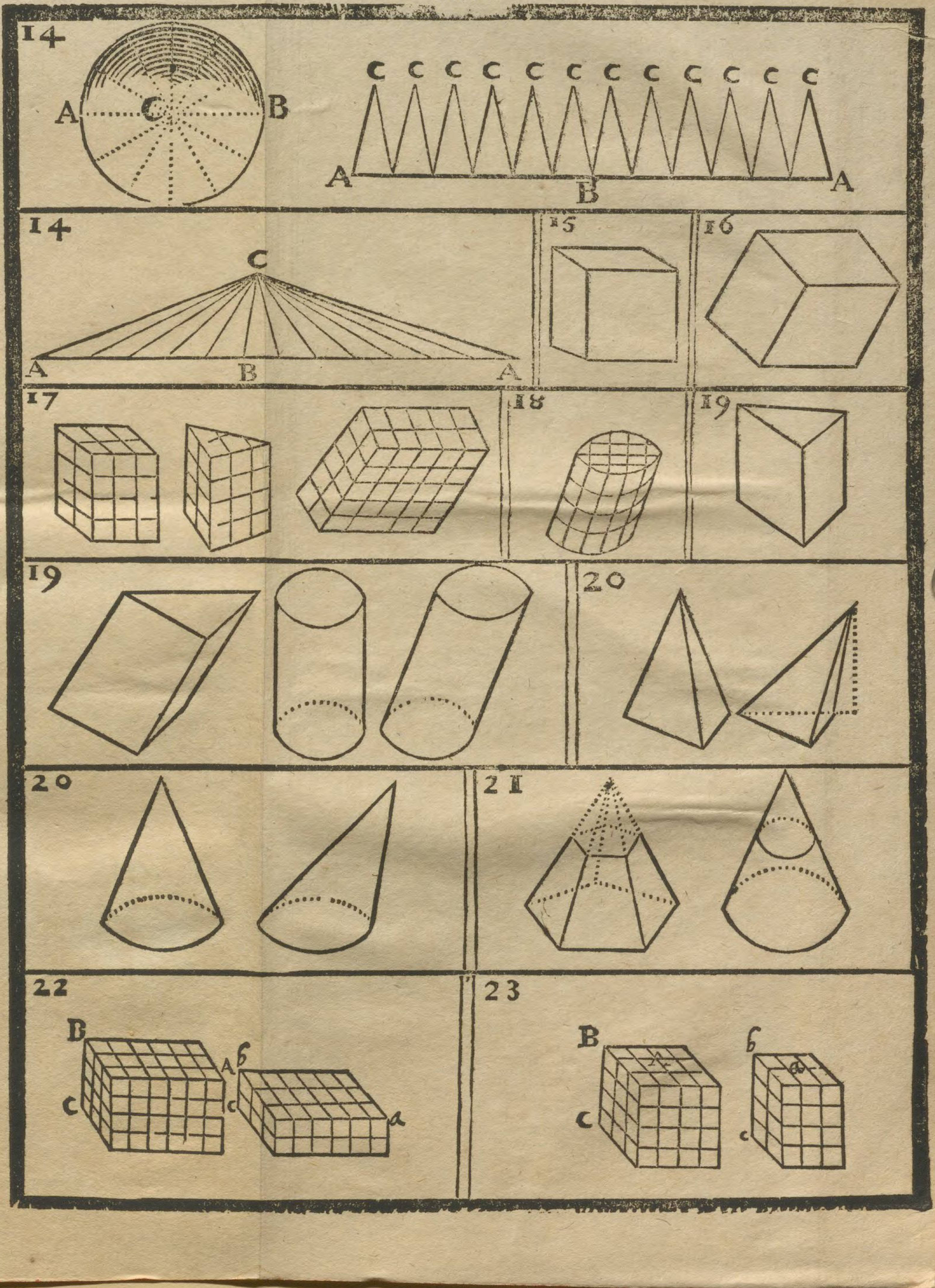
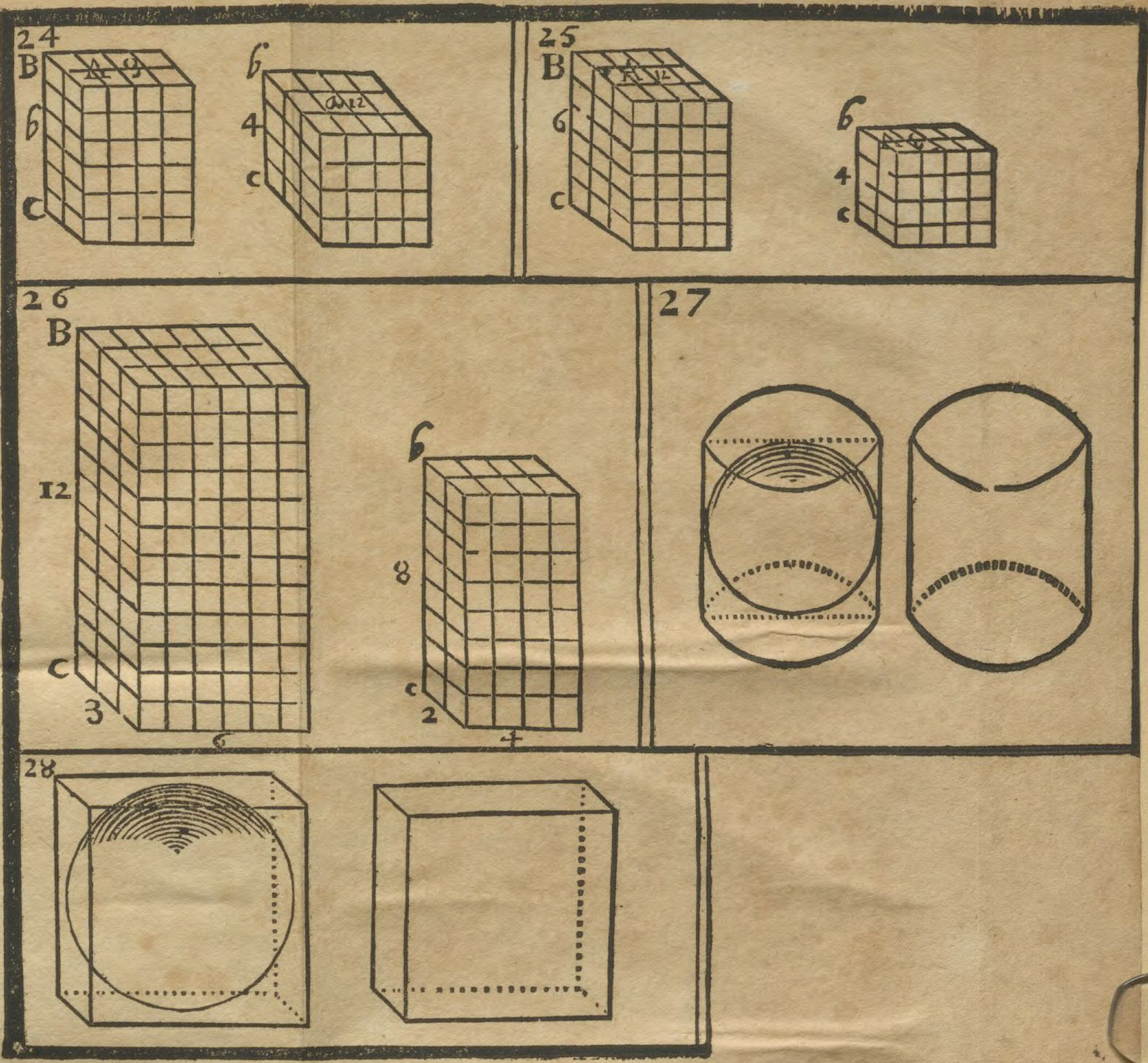


FIGURA ELEMENTORUM LIB. VII.




5
6
6
7
x
y
D
A C
B
F
E
8
b
d
B
D
9
a
c
b
A
C
B
a
10
D
A
C
B
10
a
c
b
E
C
a
b
F
C
B
11
a
d
b
c
E
A
D
B
C
11
O
E
A
D
B
C
12
a
b
O
A
BA
B
13
F
E
D
B
A
C
13
D
B
A
C
E
D
B
A
F
E
D
B


14
A
C
B
C C C C C C C C C C C C
A
B
A
14
C
A
B
A
15
16
17
18
19
19
20
20
21
22
B
A
b
C
c
a
23
B
b
C
c



24
B
6
C
6
4
c
25
B
6
c
6
4
c
26
B
12
C
3
6
8
c
2
4
27
28

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Naudé, Philippe, / Rüdiger, Johann Michael, / Lorenz, Johann

Gründe Der Meßkunst In einer neuen Ordnung vorgestellet, Und mit deutlichen und kurtzen Beweißthümern, Zum Gebrauch Der Königlichen Preuß ischen Fürsten- und Ritter-Academie abgefasset

Berlin Im Jahre 1706

4 Math.p. 248
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053705-1
VD18 11359951